

ORGANI E PROTESI

Proff. Ficuciello, Ventre, Gentile

Anno accademico 2018-2019

LEZ 1 08/04

Esistono una serie di dispositivi robotici che possono sostituire arti o articolazioni a seconda del trauma subito dal paziente. Quello che descriviamo è solo una schematizzazione del corpo umano, noi abbiamo dei modelli paradigmatici ma non abbiamo una descrizione della reale cinematica del corpo umano per via delle numerose differenze in termini cinematici tra le varie persone. Ciascun arto o articolazione viene descritto come un giunto con un certo numero di gradi di libertà ma ovviamente nella realtà bisogna considerare anche la presenza di muscoli o tendini mentre noi qui proponiamo un giunto rigido:



- La spalla ha 3 GDL e infatti consente di orientare un punto nello spazio e definire, quindi, le tre componenti spaziali dell'orientamento;
- Il gomito ha 1 GDL e quindi definisco un unico parametro cinematico;
- Il polso ha 3 GDL
- La mano è uno degli organi più interessanti, ha tra i 22-25 GDL, presenta un elevato numero di articolazioni; ha un'elevata capacità di adattamento verso l'ambiente tanto è vero che in robotica si parla di intelligenza intrinseca dovuta alla sua stessa struttura meccanica (una intelligenza embodied legata direttamente alla struttura stessa della mano);
- La protesi d'anca ha 3 GDL;
- Il ginocchio è assimilabile al gomito e ha 1 GDL;
- La caviglia ha 3 GDL
- Il piede ha oltre 10 GDL

L'informazione su una protesi è legata anche al tipo di movimento o al range di movimento legato alla forma delle superfici che entrano in contatto e che costituiscono l'accoppiamento meccanico. Nel caso di arti artificiali possiamo avere protesi TRANSOMERALI se includono anche la articolazione del gomito, protesi della sola articolazione come nel caso di protesi del ginocchio, protesi TRANSRADIALI se interessano fino alla zona del polso. Ci sono protesi parziali alle dita, cioè protesi che hanno un accoppiamento che permetta il linkage con il palmo. Abbiamo protesi

TRANSFEMORALI se includono anche la protesi del ginocchio, protesi TRANSTIBIALE se includono anche la caviglia.

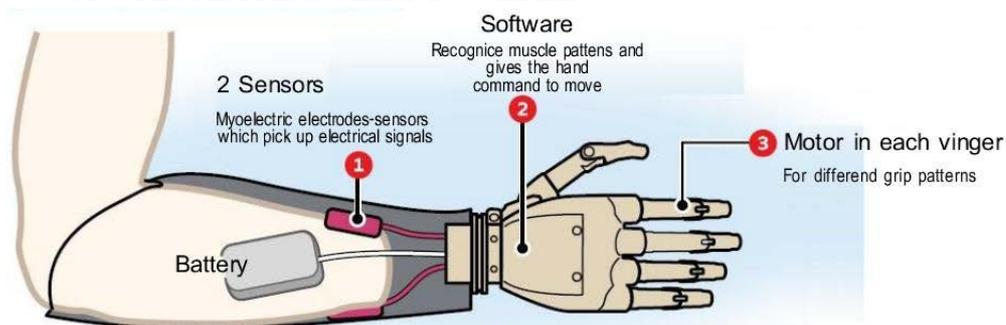
La prima protesi creata è quella di un alluce in legno e cuoio, poi nel medioevo il primo arto artificiale applicato a seguito di amputazioni per incidenti di guerra. La prima protesi attuata dal corpo è datata 1916 e sfruttava la capacità di movimento residua del paziente per far muovere delle leve (in tal caso si inseriscono dei perni e sfruttando la capacità residua del muscolo amputato si fanno muovere in senso opposto i due perni). È ancora solo una protesi meccanica. Nel 1950 abbiamo il primo esempio di protesi mioelettrica, cioè di protesi che prende in ingresso il segnale associato all'impulso elettrico del muscolo e lo sfrutta come comando per azionare un motore di tipo idraulico, pneumatico o elettrico. La prima protesi commerciale di mano si ha negli anni 80. Si iniziano a diffondere protesi attuate che hanno un certo numero di motori in relazione al numero di gradi di libertà dell'arto-articolazione che devono sostituire. Negli anni 2000 abbiamo le prime protesi antropomorfe. Nel caso di protesi di mano attuate mediante motori e batterie arriviamo intorno ai 10mila euro.

CLASSIFICAZIONE

La classificazione delle protesi avviene sulla base del tipo di trauma che il paziente ha subito e quindi sul numero di GDL che deve sostituire la protesi, sulla base della regione del corpo che deve sostituire (arto inferiore o superiore) oppure sul tipo di attuazione.

Parliamo di protesi PASSIVE se hanno solo una funzionalità estetica, protesi BODY-POWERED se attuate dal corpo per mezzo di leve, protesi EXTERNALLY-POWERED se attuate esternamente per mezzo di motori e batterie. (slides 13-14, lez1 possiamo osservare vari devices per arti superiori e inferiori). A seconda della regione da sostituire possono sorgere diverse problematiche; nel caso di mani robotiche diventa importante focalizzarsi sulla teoria del grasping. Mani robotiche collegate a bracci robotici devono, inoltre, essere in grado di muoversi autonomamente. Mentre la singola protesi di mano deve essere mossa dal paziente in relazione anche al tipo di oggetto da afferrare, nel caso della mano robotica questo comportamento deve essere determinata dall'intelligenza artificiale, cioè deve essere l'AI a osservare l'oggetto e a decidere che tipo di configurazione deve assumere la mano. Per le protesi di gambe dobbiamo considerare altre problematiche, come l'impatto con il terreno e quindi il contatto tra piede e suolo che va ad influenzare gli algoritmi di controllo e design della protesi. Per tale ragione a differenza di una protesi estetica, dove ho cedevolezza costante, ora in caso di protesi intelligente tale cedevolezza deve essere variata per mezzo di motori in funzione del contatto piede-suolo.

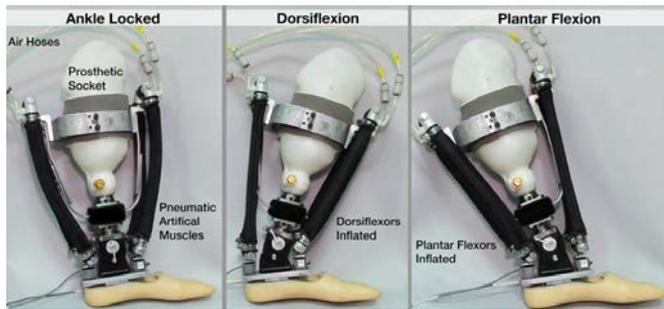
- **PROTESI EXTERNALLY POWERED**



Abbiamo una batteria, l'interfaccia protesi-paziente mediante elettrodi che misurano l'attività elettrica del muscolo, abbiamo poi un software (micro-ctrllore che deve eleggere le informazioni sensoriali. Tali protesi devono essere indossabili, facili da controllare, va dunque ottimizzata. Una problematica è dove inserire i motori: se inseriti nei giunti la mano costerebbe troppo, se inseriti nel palmo ne posso avere al più 3/4, c'è sempre un trade off.

Sempre in questa categoria di protesi, possiamo avere anche degli attuatori pneumatici che sono usati principalmente nelle protesi alle gambe. Essi sono un esempio di muscoli artificiali che permettono la camminata. Sfruttano per forza necessaria per la camminata il livello di compressione dell'aria all'interno del pistone e tale livello può essere determinato anche a partire dal segnale elettromiografico. In questo modo si possono contrarre e allungare come un muscolo umano permettendo la camminata. Tali motori, però, non sono semplici da miniaturizzare e quindi non

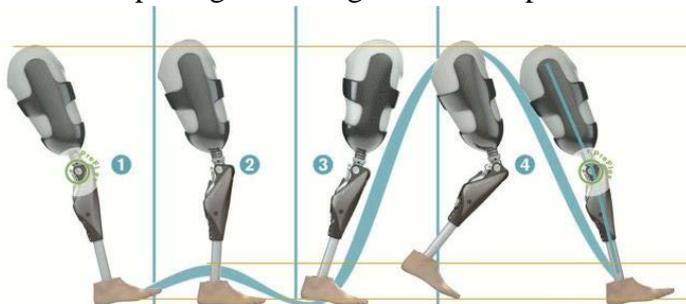
possiamo usarli per protesi di mano, hanno un pessimo rendimento, hanno bisogno di una power source non banale che sia un compressore o una pompa (nel caso di motore idraulico), ben più grandi delle batterie. Per di più nel caso di motori idraulici possono “sporcare” poiché vi scorre all’interno un fluido



- **PROTESI BODY POWERED**



In questo caso usiamo una leva e sfruttiamo il movimento di spalla per aprire e chiudere la mano: non è il massimo usare un’altra parte del corpo per realizzare il movimento dell’arto sostituito. Abbiamo poi il caso di una protesi meccanica per arti inferiori, dove si usa il flusso di energia durante la camminata per regolare la rigidità della protesi.



Dunque per quanto riguarda i pro e i contro di queste due tipologie di protesi notiamo che per peso, costo, affidabilità e durata sono migliori quelle attuate dal corpo, per destrezza, funzionalità e prestazioni meglio quelle attuate dall’esterno (sono in grado di attuare più gradi di libertà).

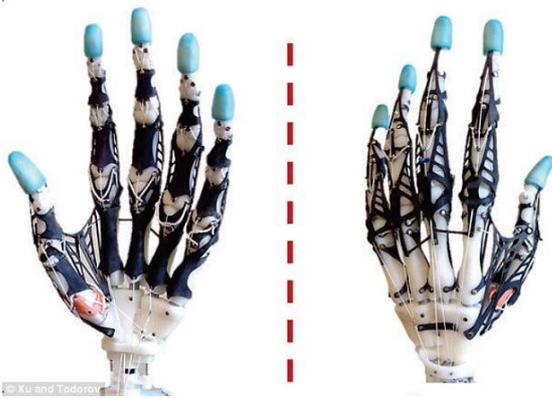
DESIGN

Per quanto riguarda il design è necessario che la protesi sia leggera e più simile possibile all’arto che va a sostituire. Ad influenzare il peso rientrano fattori come il numero di componenti usati, il tipo di materiali, le dimensioni stesse della protesi. È fondamentale, poi, l’estetica, quindi ricerchiamo protesi antropomorfe, ad esempio protesi di mani che assomigliano ad una mano umana. Si aggiungono poi ulteriori parametri da considerare nella realizzazione di una protesi come il confort nel controllo e quindi semplicità dell’interfaccia di controllo, ma anche costo e affidabilità.

Esistono diverse tipologie di interfaccia per il controllo: interfacce che possono usare segnali fisiologici come ad esempio segnali miografici, neurali, in alcuni casi interfacce che sfruttano devices intermedi. La maggior parte delle protesi sfruttano segnali elettromiografici per una questione di semplicità di interfaccia; in determinate condizioni è una tecnica meno invasiva in quanto posso

impiantare elettrodi sulla superficie cutanea, altrimenti si impiantano in maniera invasiva internamente nel muscolo.

Nella slide 25 possiamo vedere alcuni esempi di protesi in commercio e possiamo notare come più sono i gradi di libertà da attuare più saranno i motori da impiantare nella protesi e più complessa e costosa sarà la protesi. Nel caso della Bebionic abbiamo 11 giunti e 5 motori, quindi si cura il design nell'accoppiamento dei vari giunti e si mira ad ottimizzare il meccanismo di trasmissione del movimento: si riorganizzano i motori in funzione del movimento da realizzare cercando di ridurre il numero di motori ma non l'efficienza della protesi andando a combinare anche vari movimenti. Ci sono studi su come l'uomo muove la mano al fine di capire in che modo collegare i motori con i giunti e quali movimenti sono in grado di attuare, in modo da avere numero inferiore di motori ma aumentando la destrezza della mano: in tal modo si riducono la dimensione e il costo della protesi. Si è arrivati a 15 giunti e un motore che chiude tutto insieme: il vantaggio sta nel fatto che se metto una cedevolezza meccanica nella mano consento alla mano di adattarsi agli oggetti fornendo una intelligenza intrinseca alla mano.).



Nella slide 27 troviamo un esempio di protesi con sole finalità di studio: la mano BIOMIMETIC. In tale protesi sono stati riprodotti sia la struttura tendinea e sia la struttura muscolare della mano umano. Il controllo avviene per via teleoperazione attraverso un guanto con sistema di motion tracking che prende il movimento della mano e lo mappa nella mano robotica. Sui tendini troviamo i sensori, attraverso i quali si ricavano informazioni circa il contatto con il mondo esterno attraverso le tensioni registrate da questi sensori. Per quanto riguarda la mappatura, esistono matrici di trasformazione che ci permettono di passare dallo spazio giunti allo spazio cartesiano e viceversa. I motori sono nello spazio giunti, mentre il movimento è nello spazio cartesiano. La mano robotica più costosa (60mila euro) è la Shadow Dexterous Hand che presenta sensori su tutti i tendini, su tutti i giunti e sensori di forza, ha 20 motori. Questi sensori sono in grado di misurare temperatura, forza di contatto e rugosità della superficie di contatto. Possiamo realizzare mani avanzate al fine di replicare il comportamento della mano reale.



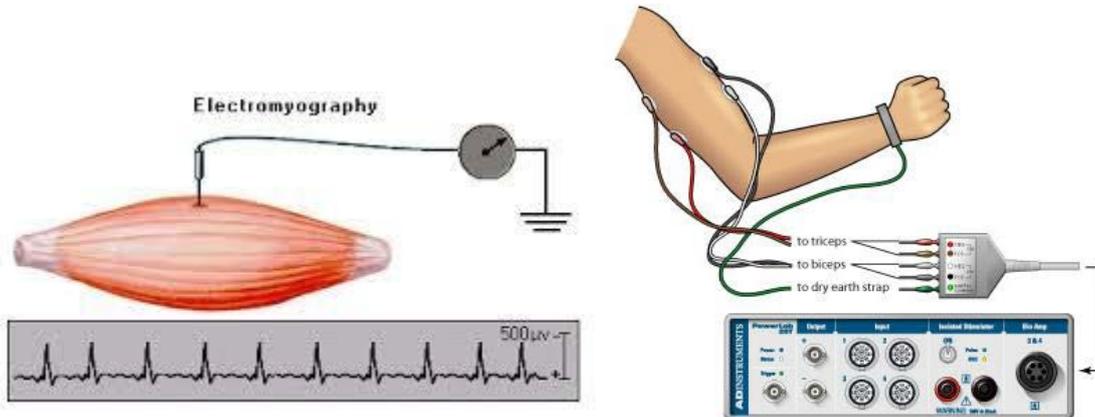
SENSING

Per quanto riguarda la questione dei sensori, abbiamo due possibilità: sensori che vanno dal corpo umano alla protesi e che permettono di misurare l'attività neurologica o elettromiografica e trasformarla in riferimento per i motori; poi sensori allocati sulla mano robotica che restituiscono

informazioni alla protesi o all'utente (informazioni tattili possono essere usate o solo dal sistema di controllo della mano o restituire all'utente).

- **SENSORI ELETTROMIOGRAFICI**

I sensori possono essere poco invasivi se consideriamo elettrodi applicati in superficie, sulla pelle in punti specifici e in grado di misurare l'attività elettrica del muscolo, il segnale viene poi elaborato, da esso ricaviamo informazioni sul movimento del muscolo. Questi sensori possono, però, spostarsi a seguito di movimenti del braccio e quindi si può perdere il contatto tra elettrodi e punti di interesse e avere un segnale errato, ci possono, poi, essere anche interferenze se non pongo l'elettrodo nel punto giusto. Un ulteriore svantaggio sta nel fatto che queste protesi generano fatica, infatti per aprire o chiudere la mano devo contrarre tutto il muscolo.



Nel caso del controllo mioelettrico abbiamo come modello il Myo-armband che legge i segnali elettromiografici e li traduce in azione. È un esempio di sistema chiuso, ha 8 elettrodi con sistema di sampling, classificazione e estrazione del segnale. Per controllare questa mano spesso si usano due braccialetti per migliorare la ricezione del segnale. Una persona che però ha perso il braccio ha una degradazione del segnale elettromiografico in superficie dunque spesso si ricorre a meccanismi più invasive che prevedono l'innervamento.

- **SENSORI INZERZIALI**

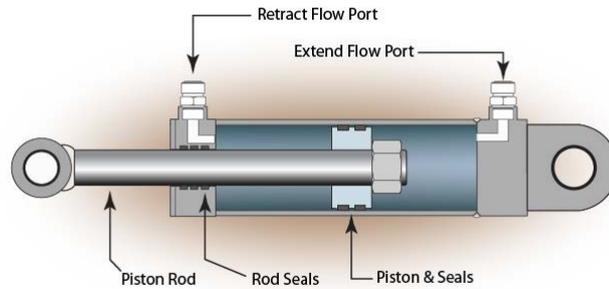
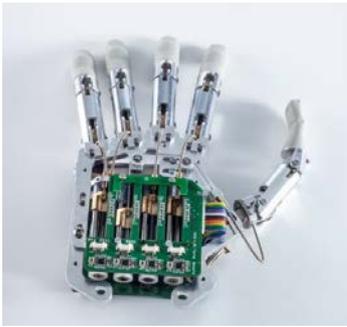
Possiamo avere accelerometri o giroscopi

- **SENSORI TATTILI**

Abbiamo sensori resistivi, ottici, conduttivi

ACTUATION

Il sistema di attuazione più utilizzato è quello dei motori elettrici, in particolare abbiamo il servomotore dotato di sensori in grado di valutare lo spostamento angolare del motore. Quelli più usati sono i motori a corrente continua (ca 300/400 euro). Hanno la forma di un cilindretto e possono essere piazzati sul palmo. Si preferisce l'attuatore elettrico perché è più efficiente (cioè presenta un rapporto tra potenza erogata e potenza disponibile sull'albero motore molto elevato, >90%) rispetto a quelli meccanici, dove abbiamo un fluido e l'attrito che si genera causa una dissipazione di energia maggiore. Possono essere di piccole dimensioni, vanno da 10 W a 10KW e sono versatili e quindi disponibili per varie applicazioni. Il problema di questi motori è che in uscita hanno una altissima velocità ma una piccola forza, a differenza di quelli meccanici che hanno a disposizione grossa forza e piccola velocità in uscita (velocità e forza si comportano in maniera duale per il principio di conservazione dell'energia) e quindi motori meccanici sono usati in azioni che richiedono forze elevate come la camminata e quindi si preferiscono per protesi di arti inferiori, dove ad esempio si usano protesi con motori pneumatici. Un problema tipico di entrambe le protesi è la power source, cioè l'alimentatore in quanto è anch'esso un device da aggiungere e quindi un qualcosa che ingombra, nel caso poi di motori pneumatici e idraulici è una problematica in più che si aggiunge alla questione dell'attrito e alla fuoriuscita di fluido.



Per quanto riguarda i muscoli artificiali possiamo avere materiali che sulla base delle variazioni di temperatura modificano la loro forma, cioè si allungano e si accorciano (shape memory alloys) in funzione delle variazioni di particolari parametri. I muscoli pneumatici permettono di esercitare una notevole forza in uscita (sono usati soprattutto in ambito bellico).

- **TRASMISSION**

L'attuazione non riguarda solo il motore ma è anche il trasferimento del movimento dal motore ai giunti e quindi ci serviamo di meccanismi di trasmissione del moto. Nella mano abbiamo una trasmissione a tendini, cioè i motori sono collegati a tendini che hanno un instradamento in funzione dell'accoppiamento da realizzare e che sono collegati alle pulegge per realizzare il movimento delle articolazioni (tirando il tendine abbiamo il movimento del giunto). Abbiamo lo spazio dei motori, lo spazio dei tendini che si accoppiano ai giunti e sono legati mediante matrici di trasformazione che legano sia le velocità che le forze: devo partire dallo spazio cartesiano fino allo spazio motori e viceversa per realizzare il controllo.

TRASMISSIONE NELLE PROTESI DI MANO

I metodi di trasmissione si basano sulle pulegge, organi cavettati, posti su degli alberi, che ruotano rispetto ad un asse fisso. È un sistema di attuazione/trasmissione chiamato WHIFFLETREE, dove abbiamo delle barre collegate tra loro e poi collegate ad un unico tendine finale che viene tirato da un'ulteriore barretta. È un sistema di leve che permette la differenziazione del movimento, posso decidere di trasferire più movimento verso un dito rispetto all'altro mediante l'interazione con l'ambiente che va ad alterare la normale cinematica della struttura.

Abbiamo trasmissioni mediante pistoni, cilindri e camere con volume variabile in funzione del movimento meccanico da ottenere.

CONTROLLO

Il controllo di una mano robotica prevede come detto in precedenza, prima di tutto lo studio dell'ambiente circostante mediante una telecamera e poi mediante un algoritmo siamo in grado di muovere la mano in funzione del movimento da realizzare. Nella protesi invece il controllo dipende molto dal tipo di interfaccia con il paziente, cioè il controllo viene realizzato attraverso dei segnali che provengono dall'utente. Abbiamo segnali elettromiografici (S-EMG), in tal caso abbiamo elettrodi posizionati sulla superficie del braccio che trasformano il segnale elettrico che proviene dai muscoli in riferimento ai motori. Dal segnale altamente variabile va estratta un'informazione e in funzione di tale informazione viene realizzato il movimento (se ho 4 canali, devo identificare l'intenzione del paziente sulla base del segnale ricevuto e si fa ciò mediante AI come reti neurali o machine learning, poiché se riesco ad indentificare l'intenzione conosco anche quali istruzioni fornire ai motori.). Abbiamo poi segnali neurografici che possono essere presi in diversi punti del cervello, ad esempio dall'area corticale. Abbiamo poi segnali dal sistema nervoso centrale e uno dal sistema nervoso periferico. Prevedono metodi invasivi.

Lo stesso segnale elettromiografico (I-EMG) può essere a volte ottenuto andando ad impiantare gli elettrodi nel muscolo sia per avere un segnale più stabile sia perché nei pazienti amputati in superficie non resta più alcun segnale.

Dobbiamo identificare il movimento, nel Myo-bracciale abbiamo un sistema chiuso, cioè sulla base del segnale viene codificato il tipo di movimento quindi all'interno abbiamo sia l'elaborazione che la classificazione del segnale.

Lo scopo della ricerca della robotica è quello di ridurre al minimo il carico destinato al paziente, ossia il comando che il paziente deve dare alla mano, cioè al più il paziente deve attivare i meccanismi di apertura e chiusura, mentre sarebbe ottimo variare la configurazione della mano in funzione a informazioni sensoriali che provengono dall'ambiente esterno e che vengono elaborati dal sistema di controllo della mano senza passare attraverso il controllo del paziente. Ad esempio vogliamo determinare se è possibile riavere l'abduzione del pollice introducendo dei sensori, come sensori di prossimità o telecamere nel palmo, le quali osservano l'oggetto e mediante AI ricostruiscono l'oggetto e la sua posizione rispetto al palmo. Vogliamo sviluppare algoritmi che permettono il movimento del pollice mediante sensori e AI. I sensori di prossimità che misurano la distanza dell'oggetto dal palmo e quando in contatto in grado di misurare la forza di contatto e scegliere la configurazione della mano. Si cerca, poi, di integrare il controllo fisiologico con altri metodi come comandi vocali o comandi manuali.

I segnali EEG permettono delle misure più precise ma prevedono tecniche più invasive.

Dunque le fasi del controllo sono:

- Codifica del segnale EMG o EEG
- Interpretazione del segnale dal sistema di controllo
- Invio segnali al motore per attuazione movimento
- Interazione protesi-ambiente

La protesi ha dei sensori che possono interfacciarsi direttamente con il sistema di controllo oppure possono restituire informazioni sensoriali all'utente (in particolare informazioni di forza; ci sono i nervi alla base del muscolo che se sollecitati e quindi fatti vibrare restituiscono informazioni di forza). La sensazione tattile dei polpastrelli viene fornita dallo spostamento sul polpastrello o può essere ottenuta da altre parti del muscolo o del nervo: si cerca di realizzare dispositivi che realizzano i segnali elettrici che l'essere umano sente quando ci sono gli sforzi o durante il contatto.

I sensori EMG vanno dal paziente alla mano e generano il movimento dei motori, mentre i sensori a contatto con il nervo (zona avambraccio) restituiscono sia informazioni di forza che sensazione tattile alla mano (il paziente riconosce l'oggetto anche senza osservarlo). Si va verso l'impianto di mani robotiche in via definitiva con queste proprietà.

Un modello interessante è quello dell'omuncolo dove notiamo delle mani enormi, ad indicare come gran parte del cervello sia dedicato alle percezioni senso-motorie legate alle mani e all'elaborazione dei dati ottenuti. La sfida della robotica è quella di poter replicare le funzionalità della mano umana. Sono stati fatti degli studi circa il controllo della mano e si è concluso che tutti i movimenti possibili della mano sono descritti da tre movimenti principali che combinano i 15 giunti della mano e permettono di ottenere tutti i movimenti possibili della mano (apertura-chiusura, adduzione del pollice, etc..). Se accoppio i giunti in un certo modo posso usare anche solo 3 motori ma posso afferrare tutti gli oggetti.

Utilizza un meccanismo di trasmissione a tendini con struttura whiffletree per differenziare il movimento. Si è quindi inserito un motore per aprire e chiudere la mano, un motore per l'adduzione del pollice e si è usato un comando vocale. Poi si è collegato un braccialetto Myo-armband per usare segnali del paziente per aprire e chiudere la mano e usare il comando vocale per posizionare il pollice. Quindi siamo riusciti ad integrare il segnale EMG con altri sensori per il comando. È un esempio di controllo condiviso: parte all'utente e parte alla macchina.

LEZ 1 : scelta al PC

LEZ 2

CINEMATICA

Ci interessa la cinematica di una mano robotica, parleremo di cinematica diretta, cinematica differenziale e cinematica inversa. La cinematica differenziale/inversa ci fornisce uno strumento di calcolo in quanto ci riferiamo a strutture-algoritmi a ciclo chiuso. Ci interessa trovare la mappatura tra lo spazio dei motori e lo spazio dei giunti. Ci piacerebbe poi nell'ipotesi di avere un numero di motori inferiore al numero dei gradi di mobilità della mano, ossia del numero dei giunti.

Ci servirà poi una mappatura dallo spazio dei giunti allo spazio cartesiano. Tali mappature servono perché, mentre il controllo della mano avviene nello spazio dei motori, la posizione della mano e delle dita viene specificata nel piano cartesiano (la stessa posizione dei giunti dipende dalla posizione dell'oggetto e dal tipo di presa della mano).

Dobbiamo quindi comprendere il concetto di MATRICE DI ROTAZIONE e di TRASFORMAZIONE di un punto da una terna di riferimento all'altra.

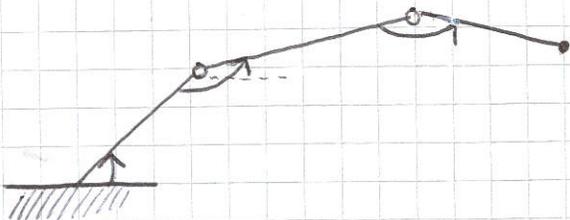
CINEMATICA DIRETTA

La funzione cinematica diretta è:

- $f(\underline{q})$ con \underline{q} vettore degli angoli dei giunti $\in \mathbb{R}^{22/25 \times 1}$ nel caso di mano antropomorfa, in alcuni casi per semplificare il modello e quindi $\underline{q} \in \mathbb{R}^{15 \times 1}$

$$\Rightarrow f(\underline{q}) = \underline{x}_e = \underline{p}_e + \underline{\phi}_e$$

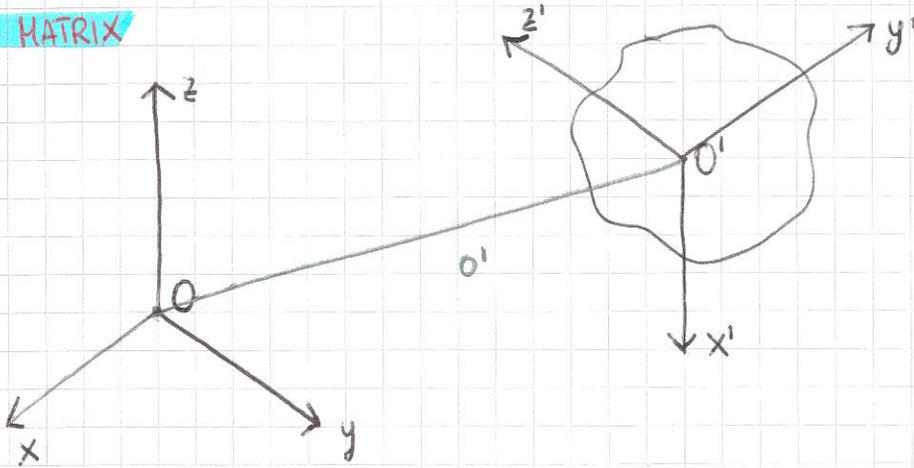
\downarrow \downarrow
POSIZIONE ORIENTAMENTO



È un esempio di dito con 3 falangi e 3 giunti. Sono noti gli angoli dei giunti

giunti e possiamo calcolare la posizione della punta del tipo mediante calcoli geometrici / trigonometrici. In strutture più complesse cerchiamo un metodo nuovo che si basa sul calcolo dell'algebra matriciale. Tale metodo si basa sul considerare in maniera singola il movimento di un link e quindi costruire il movimento complessivo della struttura andando ad unire i movimenti elementari dei singoli link.

ROTATION MATRIX



Vogliamo individuare la **POSA** (posizione e orientamento) di un corpo rigido. Fissata una terna solidale all'oggetto (x', y', z') . Se riusciamo a caratterizzare questa terna rispetto alla terna di riferimento, allora abbiamo individuato la posa del corpo rigido. Questo deve essere O' mediante il vettore $\underline{\sigma}'$ che avrà 3 componenti:

$$\underline{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \end{bmatrix} = \underline{OO}'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x'_x x + x'_y y + x'_z z \\ y' = y'_x x + y'_y y + y'_z z \\ z' = z'_x x + z'_y y + z'_z z \end{cases}$$

Per conoscere l'orientamento mi basterà conoscere i coseni direttori degli assi x', y', z' rispetto alla terna base, cioè le componenti di ciascun versore solidale al corpo rigido rispetto agli assi di riferimento x, y, z . Queste informazioni vengono raccolte nella matrice **$R =$ MATRICE DI ROTAZIONE** che come vedremo i coseni direttori di x' rispetto alla terna di riferimento (idem per y' e z')

$$R = \begin{bmatrix} x'^T \cdot x & y'^T \cdot x & z'^T \cdot x \\ x'^T \cdot y & y'^T \cdot y & z'^T \cdot y \\ x'^T \cdot z & y'^T \cdot z & z'^T \cdot z \end{bmatrix}$$

→ COLONNE = COSENI DIRETTORI DI
 x', y', z' RISPETTO A
 x, y, z

Tale matrice mi fornisce la rotazione della triada solidale al corpo rigido (x', y', z') rispetto alla triada base (x, y, z) .

$$1) R^T \cdot R = I$$

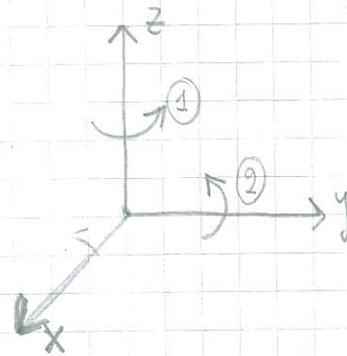
$$2) R^T = R^{-1}$$

} sono proprietà che derivano dal fatto che sto scambiando
 triade con altre ortogonali a due a due e levo gira
 (ho 9 componenti e 6 vincoli \Rightarrow 3 parametri definiscono
 la posizione del corpo nello spazio).

Rotazioni elementari

• ROTAZIONE ATTORNO ASSE Z

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



• ROTAZIONE ATTORNO ASSE Y

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

• ROTAZIONE ATTORNO ASSE X

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$