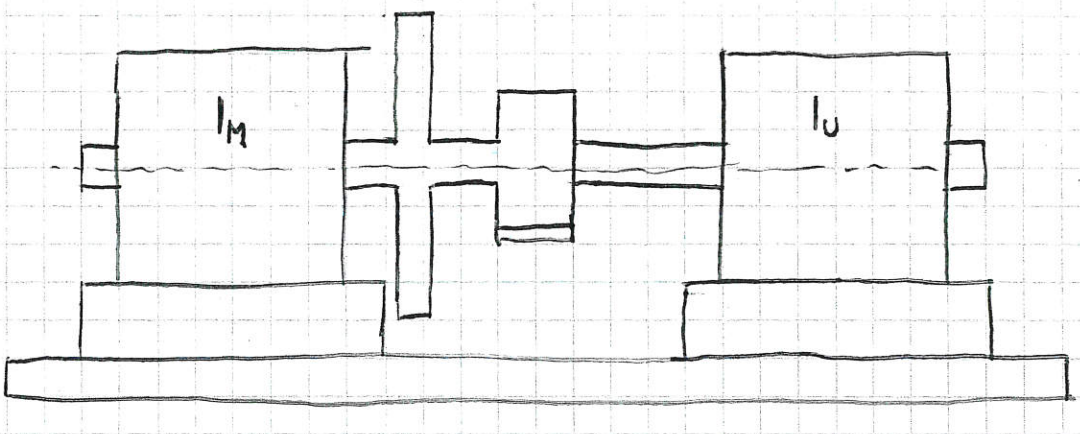
Compito 1

1)



Momenti delle due macchine hanno andamento fluidico (motrice) e costante (utilizzatrice) con la rotazione dell'albero

Momento macchina motrice $M_m(\theta) = M_0 + M_2 \cos(\theta) = M_0 - M_2 \cos\theta$

Momento macchina utilizzatrice $M_u = M_0$

$M_0 = 20\ Nm$ $M_2 = 50\ Nm$

Momenti d'inerzia di massa relativi alle parti rotanti di ciascuna macchina $I_m = 0,6\ kg\ m^2$ $I_u = 0,8\ kg\ m^2$

Velocità media del gruppo $\omega_m = 200\ rad/s$

Inoltre si considera anche il volano.

- Periodo di funzionamento del gruppo
- L'andamento della variazione dell'energia cinetica
- La massima variazione dell'energia cinetica
- Il grado di irregolarità nel periodo
- L'andamento dell'accelerazione angolare
- Andamento del momento trasmesso tra le macchine
- Momento d'inerzia di massa del volano da aggiungere per raggiungere un grado di irregolarità $\delta = 0,0015$

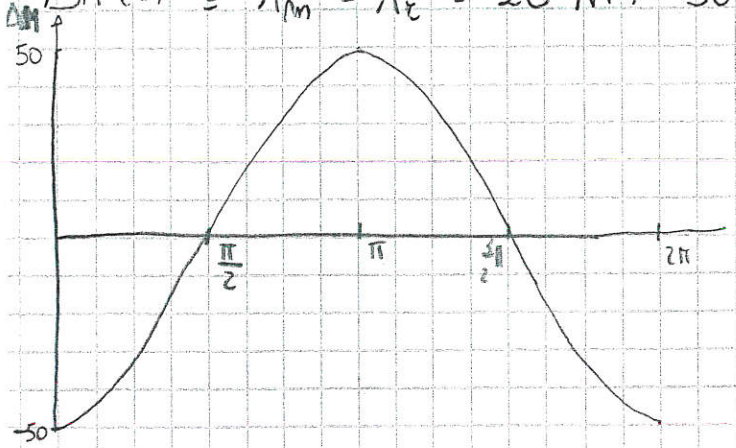
appuntiofficinastudenti.com

- Periodo di funzionamento del gruppo

- Calcolo grado di irregolarità nel periodo

Calcolo la differenza dei momenti

$\Delta M(\theta) = M_m - M_r = 20\ Nm - 50\cos\theta - 20\ Nm = -M_l \cos\theta = -50\cos\theta$

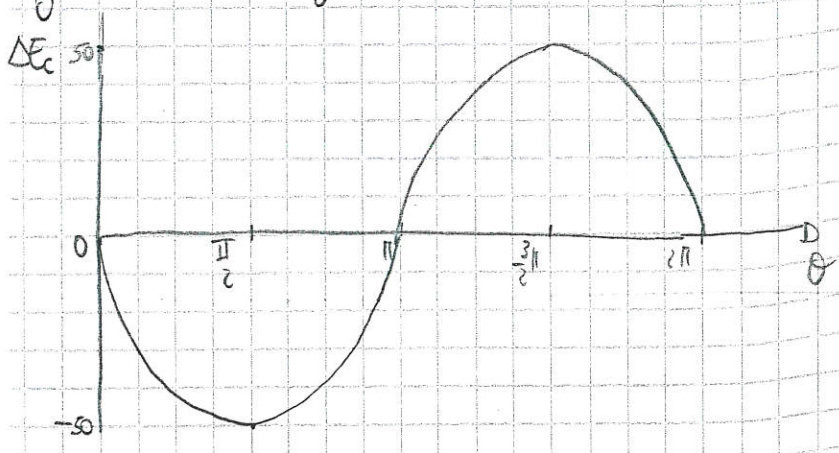


Tramite integrazione tra 0 e θ ottengo l'andamento della variazione dell'energia cinetica

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c \qquad \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$

$\int_0^\theta \Delta M\,d\theta = \int_0^\theta \Delta E_c\,d\theta = 0$

$\Delta E_c(\theta) = -50\sin\theta\ J$



- ANDAMENTO VARIAZIONE E_{CIN}

- Massima variazione E_{CIN}

$MAX\ \Delta E_c = \Delta E_c\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \Delta E_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = 50 - (-50) = 100\ J$

Dato che $\omega_M = 200$ rad/s, tramite la formula di Tredgold calcolo il grado di irregolarità nel periodo in oggetto del volano

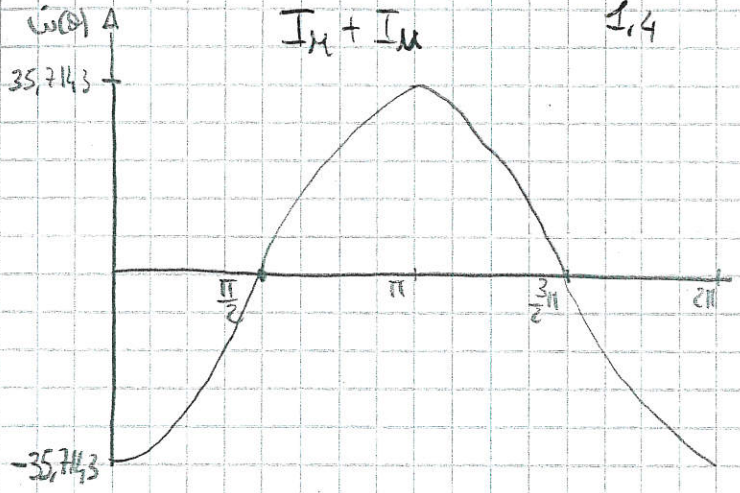
appuntiofficinastudenti.com

$$I_R = I_M + I_M$$

$$\delta T = \frac{M_{AX}\ \Delta E_C}{I_R\ \omega_M^2} = \frac{100\ J}{1,4\ kg m^2 \cdot 200^2\ \frac{rad^2}{s^2}} = \frac{100\ \cancel{kg}\ \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{s^2}}}{1,4\ \cancel{kg m^2} \cdot 4000\ \frac{rad}{\cancel{s^2}}} = 1,78571 \cdot 10^{-3}$$

- Andamento delle accelerazioni

$$\dot{\omega}(\theta) = \frac{\Delta M(\theta)}{I_M + I_M} = \frac{-50\cos\theta}{1,4} = -35,7143\cos\theta\ \frac{rad}{s^2}$$

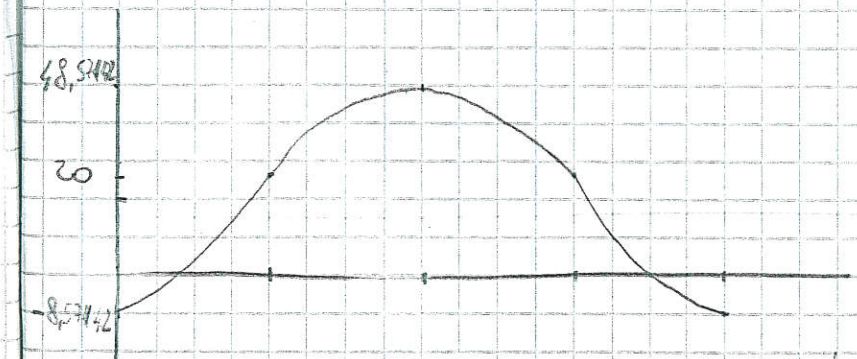


- Momento motore trasmesso tra le macchine

Il momento motore trasmesso all'albero motore vale:

$$M_m(\theta) = I_M\ \dot{\omega}(\theta) = 20\,Nm - 50\cos(\theta)\,Nm - \left(0,6 \cdot (-35,7143\cos(\theta))\right) =$$

$$= 20\,Nm - 28,5714\cos\theta\ Nm$$



Momento motore trasmesso tra le 2 macchine

$$M_T = M_m(\theta) - I_M\ \dot{\omega}(\theta) = M_R + \dot{\omega}(\theta)\, I_M$$

$$I_V = \frac{M_{AX}\ \Delta E_C}{\delta\ \omega_m^2} - (I_M + I_M) = \frac{100}{0,0015 \cdot 200^2} - 1,4 = 0,26667\ kg m^2$$

grazie al volano l'andamento della accelerazione sarà:

$$\dot{\omega}(\theta) = \frac{\Delta M\theta}{I_M + I_M + I_V} = \frac{-50\cos\theta}{1,4 + 0,26667} = -29,9991\cos\theta\ \frac{rad}{s^2}$$

appuntiofficinastudenti.com

2) Esercizio compito 1

Macchina per lavorazioni precise poggia su una pavimentazione che vibra con frequenza di 30 Hz ed ampiezza $5 \cdot 10^{-3}$ m. Stabilire la rigidità che deve possedere ciascuno dei 4 supporti elastici da interporre tra macchina e pavimento affinché la stessa vibri con ampiezza non superiore a 0,5 mm. Il peso della macchina è 22000 N. Calcolare la freccia statica di ciascun supporto.

Soluzione

$f = 30$ Hz $\qquad A = 5 \cdot 10^{-3}$ m $\qquad P_{MACCHINA} = 22000$ N

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 188,4$ rad/s

Calcolo rapporto di trasmissibilità

$T = \frac{F_t}{F_0} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-3}} = 0,1$

In assenza di smorzamento per avere una buona trasmissibilità

$\omega > \omega_n \Rightarrow T = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1}$

$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1 = \frac{1}{0,1} \qquad \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 1 = 10 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{\omega^2}{11} = \frac{188,4^2}{11}$

$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{188,4^2}{11}} = 56,805$ rad/s

$m = \frac{P}{g} = \frac{22000}{9,81} = 2242,61$ kg

$\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{2242,61}} \Rightarrow k = \frac{\omega_n^2 \cdot m}{4} = \frac{56,805^2 \cdot 2242,61}{4} =$

$= k = 1809117,986 \frac{N}{m}$

freccia statica di ciascun supporto sarà:

$\delta_{st} = \frac{P}{4k} = \frac{22000}{4 \cdot 1809117,986} = 3,04 \cdot 10^{-3}$ m

appuntiofficinastudenti.com

Esercizio 1 Compito 1 3)

Un rotore del tipo di Jeffcott è costituito da un albero di acciaio avente lunghezza $L = 1400$ mm con sezione circolare di raggio $r = 20$ mm, avente in mezzeria un disco sempre di acciaio di raggio $D = 250$ mm e spessore $s = 30$ mm. Agli estremi dell'albero il rotore è supportato elasticamente mediante 2 cuscinetti identici, con rigidezza k_o nel piano orizzontale e k_v in quello verticale.

$k_o = 1,8 \cdot 10^5 \ N/m$; $k_v = 1,0 \cdot 10^9 \ N/m$

Determinare

- I valori n_1 e n_2 in giri/min delle velocità critiche flessionali
- La velocità n^* alla quale l'orbita del centro ~~disco~~ del disco assume circolare
- Il raggio r^* di detta orbita, supponendo che lo squilibrio statico del disco sia $e = 8 \cdot 10^{-5}$ m

Soluzione

Acciaio: $E = 2,1 \cdot 10^{11} \ N/m^2$ $\delta = 7860 \ kg/m^3$

Rigidezza elastica di una trave a sezione circolare $k = 48 \frac{EI}{l^3}$

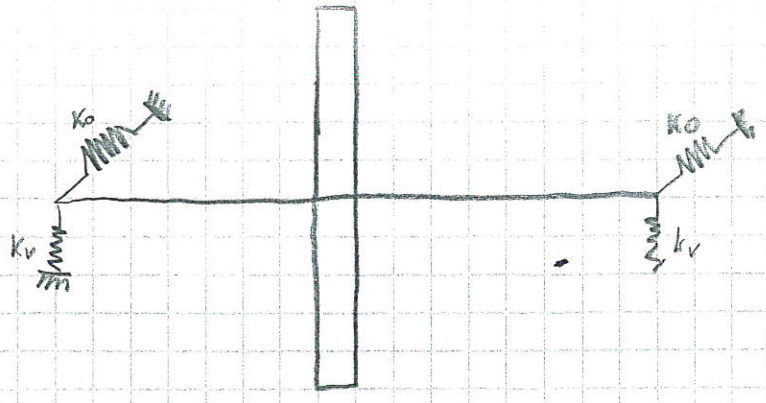
I trave a sezione circolare $I = \frac{\pi}{64} d^4$

$\Rightarrow I_{trave} = \frac{\pi}{64} \cdot (0,04)^4 = 1,256 \cdot 10^{-7} \ m^4$

$K_{albero} = \frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,256 \cdot 10^{-7}}{(1,4)^3} = 4,61388 \cdot 10^5 \ \frac{N}{m}$ $\left[\frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^4}{m^3}\right]$

$m = \delta \cdot \pi D^2 s = 7860 \cdot 3,14 \cdot (0,25)^2 \cdot 0,03 = 46,276 \ kg$

appuntiofficinastudenti.com



$$\frac{1}{k_\xi} = \frac{1}{2k_0} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3,6\cdot 10^5} + \frac{1}{4,61388\cdot 10^5} = 0,27778\cdot 10^{-5} + 0,21674\cdot 10^{-5} = 0,49452\cdot 10^{-5}$$

$$k_\xi = \frac{1}{0,49452\cdot 10^{-5}} = 2,0222\cdot 10^5$$

$$\frac{1}{k_\eta} = \frac{1}{2\cdot 10^9 / 2k_v} + \underbrace{0,21674\cdot 10^{-5}}_{\frac{1}{k}} = 0,21679\cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow k_\eta = \frac{1}{0,21679\cdot 10^{-5}} = 4,613\cdot 10^5$$

$$\omega_\xi = \sqrt{\frac{k_\xi}{m}} = \sqrt{\frac{2,0222\cdot 10^5}{46,276}} = 66,105 \text{ rad/s} \Rightarrow n_1 = \frac{60\,\omega_\xi}{2\pi} = 631,576 \text{ giri/min}$$

$$\omega_\eta = \sqrt{\frac{k_\eta}{m}} = \sqrt{\frac{4,613\cdot 10^5}{46,276}} = 99,821 \text{ rad/s} \Rightarrow n_2 = \frac{60\,\omega_\eta}{2\pi} = 953,704 \text{ giri/min}$$

ω^* per la quale l'orbita è circolare si ottiene quando l'ampiezza delle oscillazioni lungo gli assi η e ξ sono uguali

$$\omega^* = \sqrt{\frac{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}{2}} = 84,65844 \text{ rad/s} \qquad n^* = \frac{60\,\omega^*}{2\pi} = 808,839 \text{ giri/min}$$

$$\xi^* = e\,\frac{\frac{\omega^{*2}}{\omega_\eta^2}}{1-\frac{\omega^{*2}}{\omega_\eta^2}} = 8\cdot 10^{-5}\cdot \frac{\left(\frac{84,65844}{99,821}\right)^2}{1-\left(\frac{84,65844}{99,821}\right)^2} = 8\cdot 10^{-5}\cdot \frac{0,71928}{0,28072} =$$

$$= 2,0498\cdot 10^{-4} \text{ m}$$

appuntiofficinastudenti.com

4) Compito 1

Motore bicilindrico a V con angolo δ (angolo tra gli assi dei cilindri) pari a 90°.

Si ASSUMA:

$M = 250\ g$ (Massa manovella)

$a = 6\ cm$ (raggio manovella)

$e = 1,1 \cdot 10^{-4}\ m$ (squilibrio statico manovella)

$b = 24\ cm$ (lunghezza biella)

$m_b = 190\ g$ (massa singola biella)

$S = 8,5\ cm$ (distanza del baricentro G della biella dal centro della te

$m_p = 75\ g$ (massa singolo pistone)

$n = 3500\ giri/min$ (velocità di rotazione della manovella)

Si determinano:

- La massa complessiva del contrappeso da aggiungere alla manovella per bilanciare la forza di inerzia rotante e quella d'inerzia alternativa del I ordine. Si supponga di posizionare il baricentro del contrappeso alla distanza $d = 5,0\ cm$ dall'asse di rotazione della manovella
- Il valore massimo assunto dalla forza d'inerzia alternativa del II ordine.
- Le posizioni della manovella per le quali la forza di inerzia alternativa del II ordine si annulla e quella nella quale assume un valore massimo
- Una possibile disposizione del sistema di masse ~~contro~~ Controrotanti meccaniche a bilanciare la forza di inerzia alternativa del I ordine
- La velocità di rotazione n_{cr} ed il valore da assegnare a ciascuna delle masse m_{cr} controrotanti. Supponendo di siamo disposti

appuntiofficinastudenti.com

Soluzione

La velocità di rotazione della manovella sarà:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{6,28 \cdot 3500}{60} = 366,33 \ rad/s$$

Sostituisco la massa della biella con 2 masse concentrate nella testa e nel piede della biella.

$$\begin{cases} m_b = m_1^* + m_2^* \\ m_1^* \cdot s = m_2^* (l_b - s) \end{cases}$$

(ho considerato S=7,5, in realtà è 8,5)

$$m_1^* = m_2^* \cdot 2,2$$

$$m_b = m_2^* \cdot 3,2 \Rightarrow m_2^* = \frac{190}{3,2} = 59,375 \ g$$

$$m_1^* = 130,625 \ g$$

Dato che la manovella è squilibrata staticamente con

$$e = 1,1 \cdot 10^{-4} \ m$$

la forza d'inerzia rotante sarà

$$F_{IR_{Manovella}} = \underbrace{M_e}_{\text{MASSA MANOVELLA}} e \omega^2 = M_{b,m} \underbrace{a}_{\text{Raggio MANOVELLA}} \omega^2$$

$$\Rightarrow M_{b,m} = \frac{M_e \, e \, \omega^2}{a \, \omega^2} = \frac{0,25 \cdot 1,1 \cdot 10^{-4}}{0,06} = 4,583 \cdot 10^{-4} \ kg$$

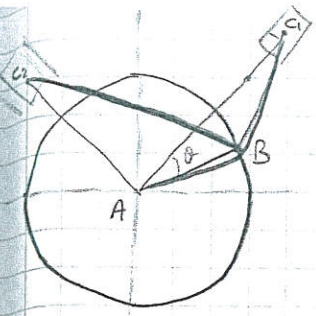
Parlando di forze d'inerzia rotanti bisogna considerare oltre alla massa della manovella bisogna considerare anche un aliquota della massa della biella concentrata nella testa della biella stessa (m_1^*).

Facciamo forza d'inerzia rotante centrifuga con massa totale

$$m_b = M_{b\,m} + m_1^* = 4,583 \cdot 10^{-4} \ kg + 0,130625 = 0,13108 \ kg$$

$$F_{IR} = m_b \, e \, \omega^2 = 0,13108 \cdot 0,06 \cdot (366,33)^2 = 1055,438 \ N$$

appuntiofficinastudenti.com



$$F_{1,\theta,1} = -(M_p + m_2^*)\, a\, \omega^2 \cos\theta$$

$$F_{1,\theta,2} = -(M_p + m_2^*)\, a\, \omega^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = (M_e + m_2^*)\, a\, \omega^2 \operatorname{sen}\theta$$

Il risultante delle 2 forze d'inerzia rotanti si troverà sull'asse della manovella e le 2 forze sono in quadratura tra loro.

$$\Rightarrow F'_{i\,\text{risultante}} = (M_p + m_2^*)\, \omega^2 a = (0{,}075 + 0{,}059375) \cdot 366{,}33^2 \cdot 0{,}06 = 1081{,}9687\ N$$

Il bilanciamento di queste 2 forze dirette lungo l'asse della manovella

$$F' = F_{iR} + F'_{i\,\text{risultante}} = 1055{,}438 + 1081{,}9687 = 2137{,}4067\ N$$

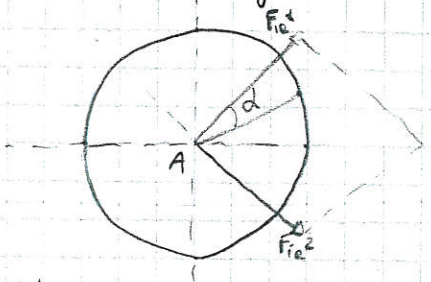
Con 2 masse controbilancianti: ~~posto~~

$$M_{\text{bilanciatori}} \cdot d \cdot \omega^2 = F_{tot} \Rightarrow M_{\text{bilanciatori}} = \frac{F_{tot}}{d \cdot \omega^2} = \frac{2137{,}4067}{0{,}05 \cdot (366{,}33)^2} = 0{,}318546\ kg$$

$$m_p = m_c + m_2^* = 0{,}075 + 0{,}059375 = 0{,}134375\ kg$$

Le forze d'inerzia alternative del 2° ordine in genere sono:

$$\frac{m_p\, a\, \omega^2}{\mu} \cos 2\alpha$$



$$F''_{ia,1} = \frac{m_p\, a\, \omega^2}{\mu} \cos 2\alpha$$

$$F''_{ia,2} = \frac{m_p\, a\, \omega^2}{\mu} \cos(2\alpha + \pi) = -\frac{m_p\, a\, \omega^2}{\mu} \cos 2\alpha$$

$$F''_{ia\,tot} = \sqrt{2}\, m_p \frac{\omega^2 a}{\mu} \cos 2\alpha = \sqrt{2} \cdot 0{,}134375 \cdot \frac{(366{,}33)^2 \cdot 0{,}06}{4} \cos 2\alpha =$$

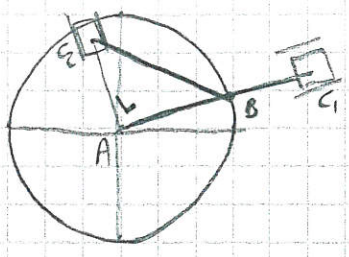
$$= 2846{,}762451 \cos 2\alpha$$

Il valore massimo si ha quando $\alpha = 0 \Rightarrow F''_{ia\,tot} = 2846{,}762451\ N$

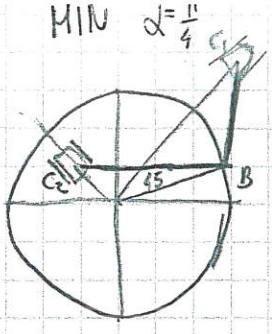
Il valore minimo per $\cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

appuntiofficinastudenti.com

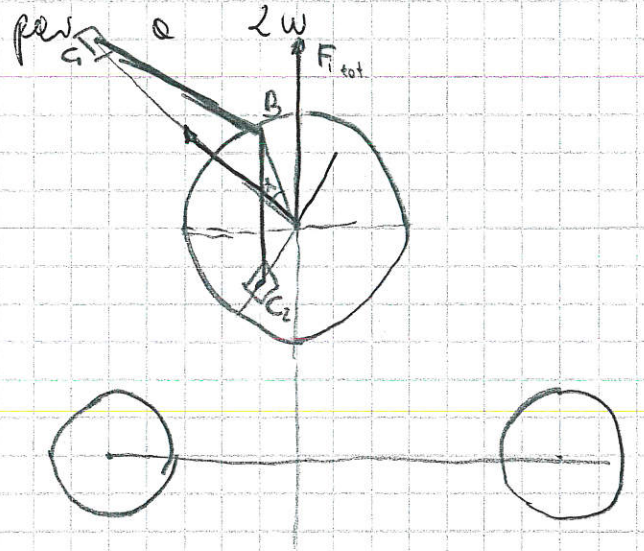
MAX $\alpha = 0$



MIN $\alpha = \frac{\pi}{4}$



Le forze d'inerzia del secondo ordine possono essere bilanciate con un sistema di masse controrotanti con velocità angolare pari a 2ω



$n_{C_2} = 7000$ giri/min

$2m'' \rho (2\omega)^2 = F_{i\,tot}$

$$m'' = \frac{F_{i\,tot}}{2\rho(2\omega)^2} = \frac{2846,762451}{2 \cdot 0,025 \cdot (732,66)^2} = 0,106\ g$$

(Teoria da pag 376 FDP)

appuntiofficinastudenti.com