Appunti d'esame di AM2 di Luca Rinaldi

1) Convergenza puntuale di una successione di funzioni

Sia I un insieme di numeri reali e sia $f_n: I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni reali definita in I. Si dice che f_n **converge puntualmente** *in* $I \Leftrightarrow \forall x_0 \in I$ $\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in I \qquad \exists v_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n > v_{\varepsilon,x}$$

f_n converge uniformemente in $\bar{I} \subseteq I$ (convergenza uniforme rispetto al punto)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n > v_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \bar{I}$$

f_n converge uniformemente in I

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n > v_\varepsilon, \ \forall x \in I$$

2) Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata

HP)

- Sia f_n derivabile con derivata continua in $[a,b]$
- $\exists x_0 \in [a,b]$: $f_n(x_0)$ converge in $\mathbb{R}$
- la successione delle derivate f_n' converga uniformemente in $[a,b]$
- Prendo $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$ in $[a,b] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = g(x)$

Th)

- Sia $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (limite puntuale) $\Rightarrow$ $\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x) = g(x)$

Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale

HP)

- Se f_n è una successione di funzioni continue che converge uniformemente verso f in I (quindi integrabile), allora sarà valido :

TH)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

DIM)

Per il teorema sulla continuità del limite, $f(x)$ è una funzione continua in I, dove $I = [a, b]$ e per questo integrabile , inoltre:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \{f_n(x) - f(x)\}dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq a_n \int_a^b dx \leq a_n(b-a) \to 0$$

$$per\ n \to +\infty\,, \quad dove\ a_n = sup|f_n(x) - f(x)|$$

3) Serie di funzioni: definizione convergenza totale, uniforme e la relazione tra i concetti

Se f_n è una successione di funzioni ed S_n la successione delle somme parziali

$$S_1 = f_1$$
$$S_2 = f_1 + f_2$$
$$S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

Tale successioni di funzioni S_n si chiama serie di funzioni di termine generale f_n e si indica anche con l'espressione:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

Se $\forall x \in I$ la serie numerica di termine generale $f_n(x)$

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

È convergente, cioè se la successione $S_n(x)$ converge $\forall x \in I$, allora si dice che la serie di funzioni converge puntualmente in I .

Se la successione di funzioni S_n converge uniformemente in I , allora si dice che la serie di funzioni converge uniformemente in I .

In ogni caso il limite per $n \to +\infty$ di S_n si chiama somma della serie di termine generale f_n e si indica con:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

La serie si dice assolutamente convergente in I se la serie di termine generale $|f_n|$ converge puntualmente in I .

La serie di funzioni si dice totalmente convergente in I se esiste una successione di numeri reali non negativi M_n tale che:

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$$

E se risulta convergente la serie numerica

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots$$

Se una serie di funzioni converge puntualmente, uniformemente o totalmente in un insieme I, essa converge, rispettivamente puntualmente, uniformemente o totalmente in ogni sottoinsieme $I' \subseteq I.$
Quindi abbiamo che: conv totale => conv uniforme => conv puntuale, la convergenza uniforme in I implica quella puntuale ma non viceversa.

4) Criterio di Cauchy puntuale

La successione f_k converge puntualmente nell'insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ verso la funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \ \ \exists v \in \mathbb{N}\colon |f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon \ \ \forall h, k > v$$

Dimostrazione

Se f_k converge puntualmente in $I \to f \ fissato\ \varepsilon > 0\ ed\ x \in I$, $\exists v \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k > v,$$

$però\ se\ h, k > v$:

$$|f_k(x) - f_h(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_h(x)| < 2\varepsilon$$

Viceversa

Se vale la condizione di Cauchy, $f_k(x)$ è una successione di Cauchy di numeri reali, che perciò converge verso un numero reale, che possiamo indicare con $f(x)$.
Verificando che f_k converge puntualmente verso la funzione f.
Fissato $\varepsilon > 0, x \in I, v \in \mathbb{N}$ passando al limite per $h \to +\infty$ otteniamo la tesi:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall k > v$$

Criterio di Cauchy uniforme

La successione f_k converge uniformemente nell'insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ verso la funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists v \in \mathbb{N}\colon |f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon \ \ \forall h, k > v \ \ \forall x \in I$$

Dimostrazione

Se f_k converge uniformemente in $I \to f \ fissato\ \varepsilon > 0$, $\exists v \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k > v, \forall x \in I$$

$però\ se\ h, k > v, \forall x \in I$:

$$|f_k(x) - f_h(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_h(x)| < 2\varepsilon$$

Viceversa

Se vale la condizione di Cauchy, in particolare $\forall x \in I$ fissato, $f_k(x)$ è una successione di Cauchy di numeri reali, che perciò converge verso un numero reale, che possiamo indicare con $f(x)$.
Verificando che f_k converge uniformemente verso la funzione f.
Fissato $\varepsilon > 0, v \in \mathbb{N}$ passando al limite per $h \to +\infty$ otteniamo la tesi:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall k > v \quad \forall x \in I$$

Criterio di Cauchy puntuale per le serie

La serie di termine generale f_k converge puntualmente in I se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in I \ \ \exists v_{\varepsilon,x} : \left|f_{k+1}(x) + \cdots + f_{k+p}(x)\right| < \varepsilon \quad \forall k > v_{\varepsilon,x}, \forall p \in \mathbb{N}$$

Criterio di Cauchy uniforme per le serie

La serie di termine generale f_k converge uniformemente in I se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left|f_{k+1}(x) + \cdots + f_{k+p}(x)\right| < \varepsilon \ \forall k > v_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in I$$

5) Serie di potenze

Data a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, una successione di numeri reali, la funzione

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Prende il nome di serie di potenze di coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, e di punto iniziale x_0 (converge almeno al punto iniziale)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad\qquad a_n \in \mathbb{R}, \ \ x_0 \in \mathbb{R}$$

La serie che si va a trattare è quella con punto iniziale in 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Per una serie di potenze si verificano le seguenti circostanze:

i) La serie converge solo per x=0;
   (insieme di convergenza è l'intervallo di centro l'origine {0})
ii) La serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$; (l'insieme di convergenza è tutto $\mathbb{R}$)
iii) Esiste un numero reale $\varrho > 0$ tale che la serie converge se $|x| < \varrho$ e non converge se $|x| > \varrho$; (l'insieme di conv. è l'intervallo -ϱ, ϱ)

Teorema sul raggio di convergenza

Hp) Se la serie di potenze converge per qualche $\xi \neq 0$ detto punto iniziale

Th) Allora converge totalmente nell'intervallo $[-|\eta|; |\eta|] \quad \forall n: |\eta| < |\xi|$

Dim)

Considero $x \in [-|\eta|; |\eta|] \subset (-|\xi|; |\xi|)$, ho che $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot (|\eta|)^n$, moltiplico e divido per $|\xi|^n$

$$|a_n| \cdot (|\eta|)^n = |a_n \xi^n| \cdot \left(\frac{|\eta|}{|\xi|}\right)^n \leq M \left(\frac{|\eta|}{|\xi|}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dove $|a_n \xi^n|$ è il termine generale di una serie numerica e tende a 0 (per il criterio di convergenza)

La serie numerica di termine generale $M_n = M\left(\frac{|\eta|}{|\xi|}\right)^n$ è convergente perché si tratta della serie geometrica di ragione $\left(\frac{|\eta|}{|\xi|}\right) < 1$

Pertanto la serie di potenze converge totalmente nell'intervallo $[-|\eta|, |\eta|]$.

Si chiama raggio di convergenza della serie di potenze l'estremo superiore $\varrho \in [0, +\infty)$ dell'insieme X dei numeri reali nei quali essa converge, cioè :

$$\varrho = supX \qquad dove \qquad X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad converge \right\}$$

Il raggio di convergenza può essere:

- 0 se e solo se la serie di potenze converge solo per x=0,
- $+\infty$ se e solo se la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $0 < \varrho < +\infty$ se la serie converge per $|x| < \varrho$ e per $|x| > \varrho$ la serie diverge

6) Esempio serie di potenze con raggio di convergenza 0, finito e infinito

Possiamo usare il teorema di Cauchy-Hadamard :

Data la serie numerica di forma $a_n x^n$ se esiste il limite $l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Allora il raggio di convergenza risulta:

$$r = \begin{cases} +\infty & se\ l = 0 \\ \frac{1}{l} & se\ 0 < l < +\infty \\ 0 & se\ l = +\infty \end{cases}$$

Oppure possiamo usare il teorema di D'Alembert :

Data la serie numerica di forma $a_n x^n$ con $a_n \neq 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ se esiste il limite $l = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Allora il raggio di convergenza risulta:

$$r = \begin{cases} +\infty & se\ l = 0 \\ \dfrac{1}{l} & se\ 0 < l < +\infty \\ 0 & se\ l = +\infty \end{cases}$$

Esempio 0 (con D'Alembert):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n!\,x^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow r = 0$$

Esempio Infinito (con Cauchy-Hadamard):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow r = +\infty$$

Esempio Finito (con D'alembert):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!\,n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n\cancel{(n+1)n!}}{\cancel{(n+1)n!}\,n^n} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow r = \frac{1}{e}$$

7) Serie di potenze e serie derivate

Consideriamo la serie di potenze di forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = a_0 + \cdots + a_k x^k + \cdots;$$

La serie ottenuta derivandola termine a termine sarà:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} = a_0 + \cdots + k a_k x^{k-1} + \cdots;$$

è detta serie derivata dalla serie di potenze

Teorema

Una serie di potenza ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata.

Se la serie di potenze ha raggio di convergenza non nullo e se $f(x)$ è la sua somma, cioè se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \forall |x| < \varrho, \qquad con\ \varrho > 0$$

Allora risulta anche

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \forall |x| < \varrho$$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad \forall |x| < \varrho$$

8) Sviluppabilità in serie di taylor

Hp)

- $f \in C^{+\infty}(I)$
- $\exists M, L \geq 0 : \left|f^k(x)\right| \leq ML^k, \qquad \forall x \in I, \forall k \in \mathbb{N}$

Th)

f è sviluppabile in serie di Taylor

Dim)

Partendo dall'esempio

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad\qquad |e^x| \leq e^a \quad \forall x \in [-a, a]$$

In cui la derivata è uguale alla funzione data; passo alla dimostrazione:

$$R_n(x,0) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x)^{k+1} = \mathrm{f(x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$$

Prendendo i valori assoluti

$$\left|\mathrm{f(x)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k\right| = |R_n(x,0)| = \left|\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x)^{k+1}\right|$$
$$\leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}a^{n+1} \rightarrow analogo\ ad\ e^x$$

$\forall x$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(L|x|)^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

Si è giunti quindi allo sviluppo di Mac Laurin

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^k(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^k(0)}{k!}x^k+\cdots$$

9) Scrivere lo sviluppo in serie di: $e^x, sen\ x, cosx$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$sen\ x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

10) Scrivere lo sviluppo in serie di: $\cosh x, senh\ x, \log(1+\mathrm{x})$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$senh\ x=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\log(1+\mathrm{x})=\mathrm{x}-\frac{\mathrm{x}^2}{2}+\frac{\mathrm{x}^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{\mathrm{n}+1}x^n}{\mathrm{n}}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}+1}x^n}{\mathrm{n}}\qquad\forall x\in(-1,1)$$

11) Scrivere lo sviluppo in serie di: $arcsen(x), arctan(x), (1+x)^\alpha$

$$arcsen(x)=x+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad\forall|x|\leq 1$$

$$arctan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots \pm (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall |x| \leq 1$$

$$(1+\mathrm{x})^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \forall |x| < 1$$

Usando il coefficiente binomiale generalizzato

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$$

12) Sistemi tridimensionali

Sono quei sistemi dove i vettori vengono visti come terne di numeri reali le cui componenti si riferiscono ai 3 parametri del sistema di riferimento tridimensionale scelto, ad esempio quello cartesiano con gli assi x, y, z

Vettori e operazioni tra vettori

Il vettore lo si pensa come un segmento orientato, al quale assegniamo un verso, una direzione e un modulo.

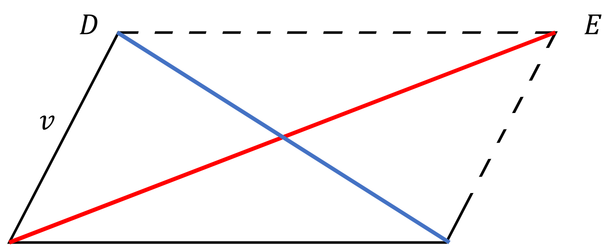
Somma e differenza tra due vettori

Siano dati due vettori $u, v \in V$, l'operazione somma tra due vettori è una legge che associa ai vettori u e v un nuovo vettore , detto vettore somma che indichiamo con $u + v$. Il vettore differenza viene indicato con $u - v$. Vi sono due metodi per fare la somma o differenza : metodo del parallelogramma o metodo analitico:

Regola del parallelogramma

Poniamo $u = AB$ e $v = CD$

facciamo coincidere A con C e disegniamo il parallelogramma



$A \equiv C$ u B

- Il vettore somma sarà dato dalla diagonale AE
- Il vettore differenza sarà dato dalla diagonale DB

Metodo analitico

Supponiamo che dei due vettori u, v siano note le componenti, cioè:

$$u = (u_1, u_2, u_3) \qquad v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$u - v = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

Con vettore opposto – v si intende un vettore che ha stessa direzione e stesso modulo di v ma verso opposto.

Proprietà della somma (algebrica) tra vettori:

1. Commutativa: $u + v = v + u$, per ogni u e v vettori;
2. Associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$, per ogni u,v e w vettori;
3. Elemento neutro: il vettore nullo 0 funge da elemento neutro della somma, ovvero: $v + 0 = v = 0 + v$ per ogni v vettore;
4. Per ogni vettore $v \in V$ esiste ed è unico un vettore, che si dice l'opposto di v e si indica con $-v$ tale che: $v + (-v) = 0$

$$(V, +) \text{ è } \mathit{un\ gruppo\ abeliano}$$

Prodotto di uno scalare per un vettore

Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale e $v \in V$ un vettore. Il prodotto scalare (numero reale per un vettore) è una legge che associa alla coppia (a, v) un nuovo vettore che si indica con av e si dice prodotto di a per v.

Metodo geometrico

Siano dati il vettore $v \in V$ e lo scalare $a \in \mathbb{R}$

- Se $a = 0$ o $v = 0$ ⇨ $av = 0$
- Se $a \neq 0$ e $v \neq 0$ allora av è un vettore avente:
  - Direzione uguale a quelle di v
  - Verso uguale a quello di v se $a > 0$, verso opposto se $a < 0$
  - Modulo dato dal prodotto del valore assoluto di a per il modulo di v ovvero: $|av| = |a||v|$