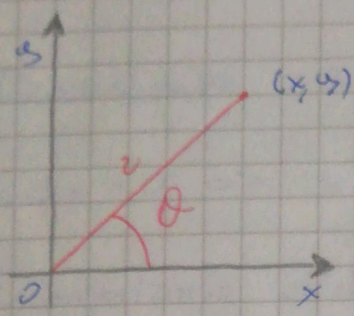
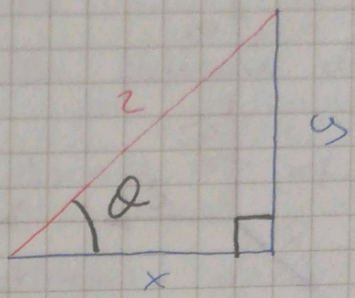
COORDINATE POLARI

Le coordinate polari $(\rho; \theta)$, a differenza delle coordinate cartesiane, usano come punti di riferimento la distanza dall'origine "ρ" al punto di coordinate cartesiane $(x; y)$ e l'angolo "θ", tra un asse fisso e la semiretta tracciata dall'origine al punto.





Come si può ben vedere, si forma un triangolo rettangolo i cui cateti derivano dalla definizione di seno e coseno:

- Il seno è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa. $\sin(\theta) \overset{def}{=} y/\rho \iff y = \rho \cdot \sin(\theta)$
- Il coseno è il rapporto tra il cateto adiacente l'angolo e l'ipotenusa. $\cos(\theta) \overset{def}{=} x/\rho \iff x = \rho \cdot \cos(\theta)$

Inoltre, dalle relazioni trigonometriche ricaviamo la tangente e l'ipotenusa:

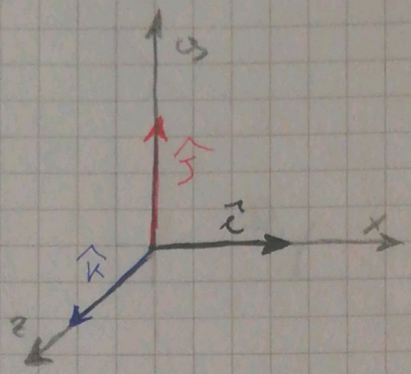
$$tg(\theta) \overset{def}{=} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x} = \frac{\rho \cdot \sin(\theta)}{\rho \cdot \cos(\theta)}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \iff \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

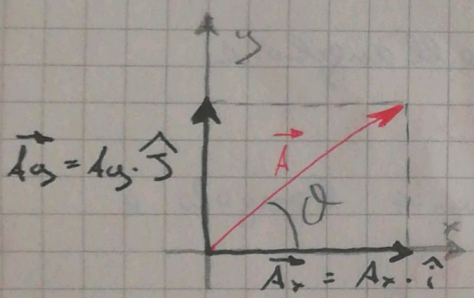
Possiamo riportare il discorso ai vettori per studiare le componenti degli stessi.

VETTORE UNITARIO E COMPONENTI DI UN VETTORE

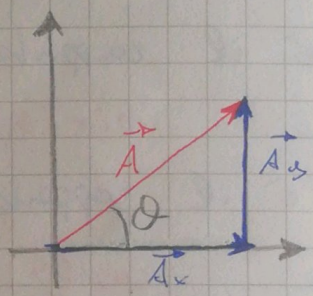
Il vettore unitario è un vettore di intensità pari a uno e direzione e verso definiti. Questo vettore è fondamentale per descrivere le componenti dei vari vettori.
Durante il corso useremo i vettori unitari $\hat{\imath}$; $\hat{\jmath}$; $\hat{k}$ per i rispettivi assi x; y; z.



Un vettore può essere descritto in modo completo dalle sue componenti, note come "componenti rettangolari".



Per poterli sommare, poniamo sempre la componente A_y nel seguente modo



Sempre grazie alle definizioni di seno e coseno, ricaviamo le componenti, il vettore e l'angolo.

- $\sin(\theta) = A_y/A \iff A_y = A \cdot \sin(\theta)$
- $\cos(\theta) = A_x/A \iff A_x = A \cdot \cos(\theta)$
- $tg(\theta) = A_y/A_x \iff \theta = \tan^{-1}(A_y/A_x)$
- $A^2 = A_x^2 + A_y^2 \iff A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

Generalmente, un vettore viene riportato con la seguente notazione:
$\vec{A} = A_x \cdot \hat{\imath} + A_y \cdot \hat{\jmath}$; inoltre $\tan(\theta) = B_y/B_x = (A_y + B_y)/A_x + B_x$

Nel caso delle somma, si avrà invece che:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \cdot \hat{\imath} + (A_y + B_y) \cdot \hat{\jmath} \iff R = \begin{cases} B_x = A_x + B_x \\ B_y = A_y + B_y \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

MOTO IN UNA DIMENSIONE

- Lo spostamento "Δx" di un punto materiale è definito (il simbolo Δ indica la variazione) come la variazione della sua posizione in un certo intervallo di tempo. Se dalla posizione iniziale "x_i" si passa a quella finale "x_f", si avrà:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Ovviamente a seconda della direzione del moto, si avrà:

$$\Delta x > 0 \Rightarrow x_f > x_i \quad ; \quad \Delta x < 0 \Rightarrow x_f < x_i$$

È importante distinguere lo spostamento dalla distanza percorsa, la seconda indica la lunghezza del cammino percorso da una particella, mentre lo spostamento no! Se consideriamo infatti un giocatore di calcio che parte dalla sua parte, arriva a centrocampo e poi torna alla sua parte, questo avrà uno spostamento nullo siccome $x_f = x_i$.

Lo spostamento è una quantità vettoriale, ma essendo ora noi in una dimensione, ci basterà indicare se positivo o negativo per capirne la direzione.

Passiamo ora al concetto di Velocità media ("V_x media") di un punto materiale (un punto materiale è un corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto al fenomeno in analisi), è definita come il rapporto tra lo spostamento Δx del punto materiale, e l'intervallo Δt durante il quale lo spostamento è avvenuto.

teorema del valore medio

$$V_{x,media} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} V(x)\, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} (a \cdot t + v_0)\, dt$$

$$V_{x,media} = \Delta x / \Delta t \qquad [m/s]$$

indica che il moto è lungo l'asse "x"

vedi quad arancione.

Certe volte però è necessario conoscere la velocità in un certo istante "t" e non in tutto l'intervallo (come visto per la velocità media), in questo caso interviene

la velocità istantanea:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t = dx/dt$$

↓

Resta limite equivale alla derivata di "x rispetto a t"

MODELLI DI ANALISI: PUNTO MATERIALE CON VELOCITÀ COSTANTE

In fisica scegliere il giusto modello di analisi ci aiuta ad avvicinarci alla soluzione del nostro problema, ad esempio nel caso sopra riportato abbiamo velocità costante, questo significa che velocità media e istantanea coincidono, di conseguenza è sufficiente applicare la prima:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t}$$

Ricordando di scegliere come $t_i = 0$ avremmo che:

$$v_x = \frac{x_f - x_i}{t} \quad (\text{posto } t = t_f)$$

e che ciò comporta che:

$$x_f = v_x \cdot t + x_i \rightarrow \text{Equazione della retta}$$

ACCELERAZIONE

Come per la velocità, va distinta l'accelerazione media e quella istantanea. L'accelerazione media "$a_{x,media}$" del punto materiale è definita come la variazione della velocità Δv_x divisa per l'intervallo di tempo in cui avviene la variazione:

$$a_{x,media} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

In genere il valore dell'accelerazione media può cambiare a seconda dell'intervallo che si considera, si comprende quindi la necessità di introdurre l'accelerazione istantanea.

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{d v_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Come si può ben vedere, l'accelerazione è la derivata seconda di "x" rispetto al tempo.

Nei capitoli successivi vedremmo che la forza agente su un corpo è proporzionale alla sua accelerazione.

MODELLO DI ANALISI: PUNTO MATERIALE CON ACCELERAZIONE COSTANTE

Siccome l'accelerazione è costante, avremmo che accelerazione media e istantanea coincidono, se consideriamo $t_i = 0$, allora si avrà che:

v_{xf} è la velocità al variare dell'accelerazione in funzione di t.

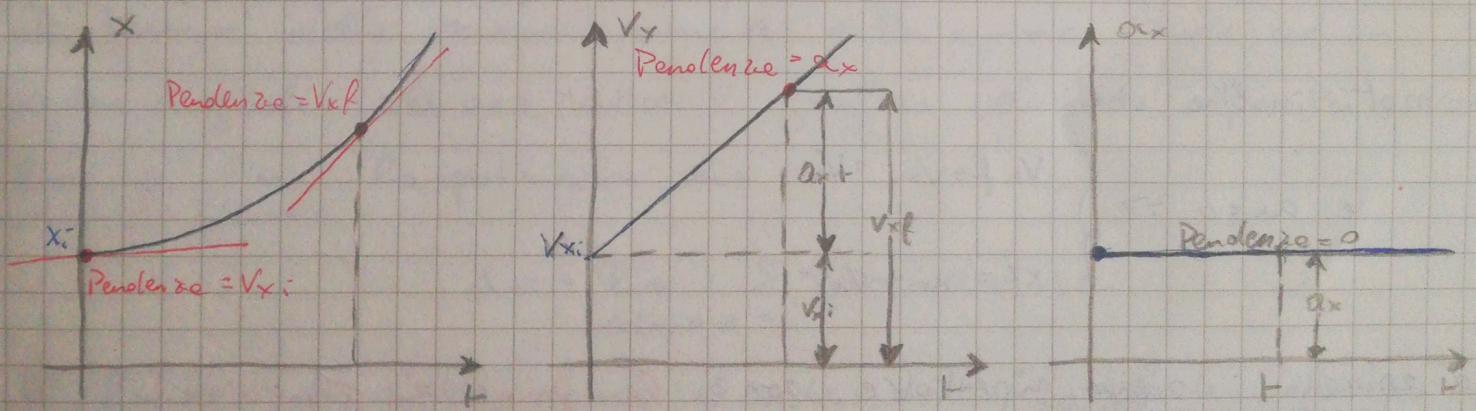
(per "a_x" costante) $a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0} \iff v_{xf} = a_x \cdot t + v_{xi}$

$v_{xf} = v(t)$

Equazione della velocità

Questa espressione ci permette di determinare la velocità del corpo ad ogni istante noto l'accelerazione e la velocità iniziale.

Vediamo i grafici di accelerazione e velocità:



Possiamo inoltre dedurre che per trovare la velocità media con accelerazione costante, basterà fare la media aritmetica tra le velocità:

$$v_{x,\text{media}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad \text{(Per } a_x \text{ costante)}$$

In base alle equazioni viste fino ad ora, troviamo l'equazione che ci dà la posizione di un corpo in funzione del tempo.

$$\Delta x = x_f - x_i = v_{x,media} \cdot t = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf}) \cdot t$$

Da ciò ne deduciamo che:

$$\rightarrow x(t) = x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf}) \cdot t \quad \text{(per "ax" costante)}$$

Un altro modo per ottenere la posizione finale di una particella è la seguente:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]\, t$$

$$\rightarrow x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \text{(per } a_x \text{ costante)}$$

Si può inoltre ottenere un'equazione che non contiene il tempo nel seguente modo:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) = x_i + \frac{v_{xf}^2 + v_{xi}^2}{2a_x}$$

$$\rightarrow v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad \text{(per "ax" costante)}$$

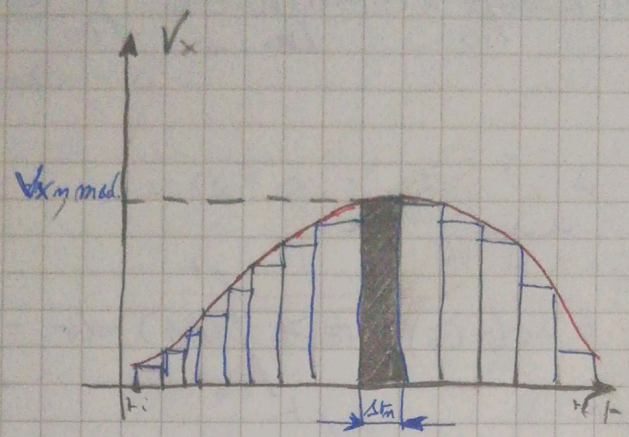
Si noti inoltre che:

$$\text{se } a_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_{xf} = v_{xi} = v_x \\ x_f = x_i + v_x t \end{cases}$$

Le equazioni sopra riportate sono le principali equazioni cinematiche del moto unidimensionale.

CALCOLO DIFFERENZIALE APPLICATO ALLA CINEMATICA

Consideriamo la velocità in funzione del tempo di un punto materiale in moto lungo l'asse x. L'area totale al di sotto della curva è pari allo spostamento totale del punto materiale.



$x_n(t) = V_{xn,media} \cdot \Delta t_n$

L'area del rettangolino rappresenta lo spazio compiuto dal p.to materiale nell'int. Δt_n

Siccome lo spostamento in quell'intervallino è pari a $V_{xn,media} \cdot \Delta t_n$; per calcolarlo in tutto l'intervallo "$t_f - t_i$", è la somma di tutti i rettangolini:

$$\Delta x = \sum_n V_{xn,media} \cdot \Delta t_n$$

Se l'area dei rettangolini viene ridotta progressivamente, il numero di termini della somma aumenta e la somma tende ad un valore uguale all'area sotto il grafico velocità-tempo. Pertanto nel $\lim_n$ o $\lim_{\Delta t_n \to 0}$ lo spostamento sarà:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n V_{xn,media} \Delta t_n$$

Il limite di questa somma è anche detto <u>integrale definito</u>:

$$\lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n V_{xn,media} \Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} V_x(t)\, dt$$

LEGGE ORARIA

Per trovare il valore della spostamento in ogni istante "t", partiamo dalla relazione dell'accelerazione

Ricordando che:

$$a(t) = \frac{d(v(t))}{dt} \Leftrightarrow d(v(t)) = a(t)\cdot dt \Leftrightarrow \int_{v_0}^{v(t)} d(v(t)) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \Leftrightarrow$$

(a(t) costante)

$$\Leftrightarrow v(t) = a(t)\cdot t + v_0$$

Ricordando lo spostamento, si avrà che:

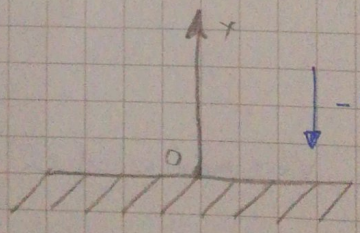
$$v(t) = \frac{d(x(t))}{dt} \Leftrightarrow v(t)\cdot dt = d(x(t)) \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} v(t)\cdot dt = \int_{x_0}^{x(t)} d(x(t))$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} (a(t)\cdot t + v_0)\,dt = \int_{x_0}^{x(t)} d(x(t)) \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} (a(t)\cdot t)\,dt + v_0 \int_{t_0}^{t} dt =$$

$$= x(t) - x_0 \Leftrightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}$$

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

In base alla legge oraria sopra riportata, ci è possibile studiare il moto di un corpo in caduta libera; considerando l'asse di riferimento positivo verso l'alto, si avrà:



Il corpo, lasciato libero di cadere (senza alcuna velocità iniziale) cadrà verso il basso con un'accelerazione costante pari a $g = 9{,}8\ m/s^2$ (dato il sistema di riferimento positivo verso l'alto, l'accelerazione sarà $-g$), in base a ciò possiamo dire di trovarci in un moto uniformemente accelerato, il che ci permetterà di calcolare la velocità nel seguente modo:

$$\boxed{v(t) = -g\,t}$$

Basandoci sulle leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato si avrà:

$$x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 t + x_0$$

v_0 → Supponiamo nessuna velocità iniziale

x_0 → Spostamento iniziale, nel nostro caso lo chiameremo h

Si avrà quindi:

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + h$$

$a = -g$

$$\boxed{x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2}$$

Il tempo e la velocità di caduta saranno:

$$\boxed{v_c(t) = \sqrt{2gh}} \quad ; \quad \boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

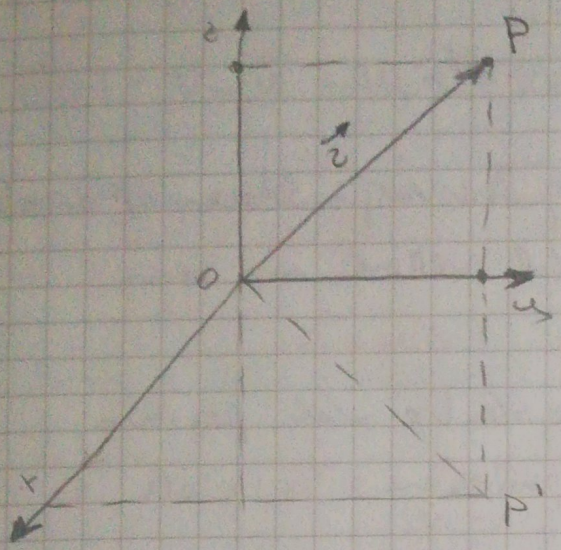
← Ca $x(t) = 0$ poiché il tempo è di caduta.

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO (PARTE)

$\Delta > 0$	$ax^2+bx+c \geq 0$ (≥)	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$ (≤) (≥)
	$ax^2+bx+c < 0$ (<)	$x_1 < x < x_2$ (<) (<)
$\Delta = 0$	$ax^2+bx+c > 0$	$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$
	$ax^2+bx+c \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
	$ax^2+bx+c < 0$	$\nexists$ sol
	$ax^2+bx+c \leq 0$	$x = x_1$
$\Delta < 0$	$ax^2+bx+c > 0$ (≥)	$\forall x \in \mathbb{R}$
	$ax^2+bx+c < 0$ (<)	$\nexists$ sol

CINEMATICA DEL PUNTO: MOTO DEL PIANO (IN DUE DIMENSIONI)

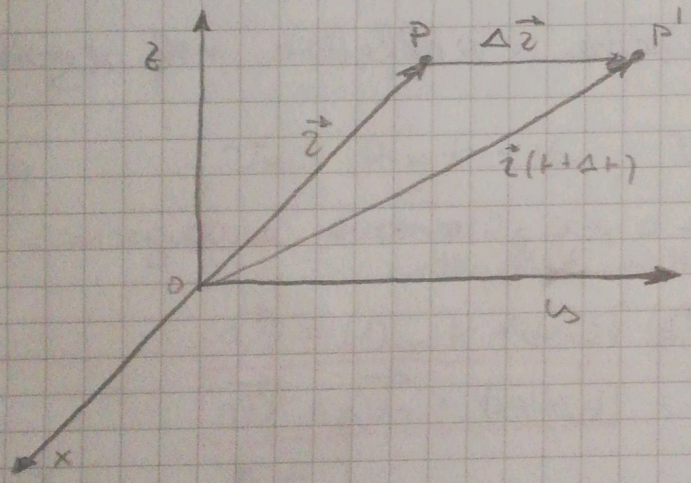
Se consideriamo più dimensioni, otteniamo un vettore posizione $\vec{r}$:



$\vec{r}$ = Vettore posizione (che sarà funzione del tempo, nel caso in cui la pallina stava muoversi)

$\hat{i}; \hat{j}; \hat{k}$; sono i vettori ortogonali, noti come versori, ci indicano la direzione lungo gli assi x, y, z.

Nel caso di uno spostamento, si avrà:

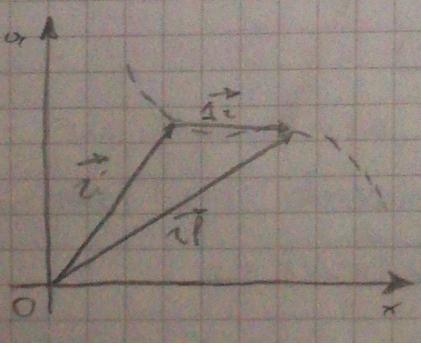


$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - r(t)$$

Il vettore spostamento è indicato da $\Delta\vec{r}$, esso è per es:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}f - \vec{r}i$$

N.B. $\Delta\vec{r}$ è minore della distanze effettivamente percorse. (come si può vedere nella figura sotto)

Ricordando vettorialmente si avrà:

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\hat{i} + y(t)\cdot\hat{j} + z(t)\cdot\hat{k}$$