PAPERDREAM®

Gli originali

Lorenza

Lomonaco

I. Meccanica via Claudio

3363473911

Ti piacciono gli animali?
E allora vota il tuo preferito su:

www.facebook.com/Paperfriends.it

(1) Strutture Algebriche

comm teoria insiemi

Insieme = collezione di elementi che può essere definito secondo vari modi:

1. Elencazione
2. tramite le sue proprietà
3. diagramma di Venn.

Considerando 2 insiemi A e B. A è sottoinsieme proprio di B se

$\exists$ almeno un $b \in B \mid b \notin A$ se $\exists$ almeno 1 elem di B che non appartiene ad A

se $A \subset B \wedge B \subseteq A = A = B$

operazioni tra insiemi

1. $A \cap B = \{\forall x \in \mid x \in A \wedge x \in B\}$
2. $A \cup B = \{\forall x \mid x \in A \vee x \in B\}$
3. $A \setminus B = \{\forall x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$[\wedge = e \quad \vee = o]$

$\{\ldots\}$ non contano rip. né ordine

$(\ldots)$ contano sia rip. che ordine

$[\ldots]$ contano solo rip.

Prodotto cartesiano $A \times B$ è un insieme formato da tutte le coppie ordinate (a, b) con prima componente in A e seconda in B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A = \emptyset \vee B = \emptyset \Rightarrow A \times B = \emptyset$$

prodotto cartesiano di più di 2 insiemi usando n-uple di ~~scalari~~ elementi

se gli elementi sono tutti uguali $A_1 = A_2 = A_3 \ldots \Rightarrow$ diciamo A^n tale prodotto ovvero l'n-ma potenza cartesiana di A

comm sulle applicazioni

una corrispondenza h di A in B è una coppia $(A \times B, G)$ dove G, chiamato grafico, è il sottoinsieme di $A \times B$ $\quad G = \{(a, b) \text{ con } a \in A \wedge b \in B \mid aRb\}$

se $(x, y) \in G \Rightarrow y \in B$ corrisponde a $x \in A$: xhy

definire una corrispondenza h vuole specificare $\forall x \in A$ quali elementi di B corrispondono a x cioè per quali $y \in B$ si ha che xhy con $x \in A$

considerando una qualsiasi relazione R essa non è altro che un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$

siano $A, B \neq \emptyset$. Una applicazione h da A in B è una corrispondenza che gode della proprietà:

$\forall x \in A \; \exists! \; y \in B \mid x h y$ a ogni elemento del dominio (A) associa un unico elemento del codominio (B)

$h(x) = y$ y = immagine di x tramite h

A: dom B: cod. $f: A \to B$

una $A \neq \emptyset$ una relazione binaria è una corrispondenza di A in se stesso $A \times A$ $A = B$.

proprietà delle relazioni

1. riflessiva $\forall x \in A$ $x R x$
2. simmetrica $\forall x, y \in A$ $x R y \Rightarrow y R x$
3. antisimmetrica $\forall x, y \in A$ $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$
4. transitiva $\forall x, y, z \in A$ $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

(A) relaz di equivalenza: 1, 2, 4 rifl, simm, trans

(B) relaz di ordine 1, 3, 4 rifl, trans, antisimm.

(A) sia R una relaz di equivalenza in A, $A \neq \emptyset$

$\forall x \in A$, classe di eq. di $x = [x] = \{ y \in A \mid x R y \}$

$x \in [x]$ perché $x h x$

ogni classe non vuota di $[x]$ e x sono rappresentanti della classe

A = unione delle classi

$\forall a, b \in A \Rightarrow \begin{cases} a h b \Rightarrow [a] = [b] \\ a \not h b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset \end{cases}$

le classi di equivalenza costituiscono una partizione di A

sia R una relazione di eq. in $A \neq \emptyset$, l'insieme delle classi di equivalenza rispetto ad h = insieme quoziente di A rispetto ad h $= \frac{A}{h}$

Relazioni e corrispondenze

dato un insieme $S \neq \emptyset$ si chiama $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S o l'insieme dei sottoinsiemi

$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(S)$ valgono:

1. ASSOCIATIVA $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ unione
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ intersezione
   $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$
2. commutativa $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \setminus B \neq B \setminus A$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Relazioni di De Morgan

$C_S(A \cap B) = (C_S A) \cup (C_S B)$
$C_S(A \cup B) = (C_S A) \cap (C_S B)$
] simboli di unione e intersezione si invertono

le relazioni binarie e di equivalenza godono delle 4 proprietà

Relazione di ordine

$a \leq b \iff b - a \in \mathbb{R}$ $b - a \geq 0$

1. $a - a = 0 \in \mathbb{R}$ vale la: riflessiva
2. $a \leq b$ $b \not\leq a$ non vale la simm.
3. $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow b = a$ antisimm.
4. $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ transit.

(B) una relazione di ordine è totale se $\forall x, y \in A \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$
$A \neq \emptyset$

per relazione di ordine hai a livello intuitivo simbolo $\subseteq$ e il concetto di massimale e minimale $\leq$

per relaz. di ordine totale hai simbolo $\leq$ e concetto di minimo e massimo.

Il min. e il max se $\exists$ sono unici

m è max in B se $\forall x \in B$ $x \leq m$

m è minimo in B se $\forall x \in B$ $m \leq x$

Applicazioni o funzioni

Dato dato applicazione $f: A \to B$. Se $x \in A$ e $y = f(x) \in B$
$x \to y$

immagine di f = $\mathrm{Im} f = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \mid y = f(x)\} \subseteq B$

$\Rightarrow$ per avere immagine di tutti elementi del dominio

controimmagine di y tramite $f = f^{-1}\{y\}$

$$f^{-1}\{y\} = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

$f^{-1}\{y\}$ può essere vuoto

$f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \iff y \in \operatorname{Im} f$

se $f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \Rightarrow$ esso può essere costituito da uno o più elementi del dominio A

se $Y \subseteq B$ è sottoins. del cod. dominio $\Rightarrow$ la controimmagine di f è il sottoinsieme

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

elem distinti del D hanno corrispondenti distinti del C

iniettiva $\iff \forall\, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

suriettiva $\iff \forall y \in B\ \exists$ almeno un $x \in A \mid y = f(x)$

biettiva $\iff$ sia iniettiva che suriettiva

ogni elem del C è corrispondente di almeno un elem del D

funzione composta

$A, B, C \neq \emptyset \qquad f: A \to B,\ g: B \to C$

$h: A \to C$ ponendo $\forall x \in A \quad h(x) = g(f(x))$

composta $= g \circ f = gf$

$h: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

non vale commutativa: $f \circ g \neq g \circ f$

vale associativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

funzione inversa

a matrice ho soltanto dominio

g è inversa di f se $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$

$B \to C \qquad A \to B \qquad B \quad A \qquad A \quad B$

la funz identità è quella che associa a ogni elemento del dominio lo stesso del cod. dominio

la funzione inversa quando $\exists$ è unica

quando $\exists$ è inversa, $\forall y$ del cod il simbolo $f^{-1}(y)$ è sia l'immagine di y tramite f^{-1} (elem. del dom) che la controim. di y tramite f (sottoinsieme del dom. formato da un unico elemento)

caratterizzazione: una funzione ha inversa $\iff$ è biettiva

deve accadere che $\forall x \in A \quad g \circ f(x) = x$ e
$\forall y \in B \quad f \circ g(y) = y$

Strutture algebriche generalità

sia $S \neq \emptyset$. un'operazione binaria interna di S
è un'applicazione $f: S \times S \to S$

si usa il simbolo $*$ e si scrive $a * b \ \forall (a,b) \in S \times S$
invece di $f(a,b)$

un'operazione binaria interna è associativa se
$(a * b) * c = a * (b * c) \ \forall a,b,c \in S$

sia $S \neq \emptyset$. una struttura algebrica con operazione interna $*$ e con sostegno S è una coppia $(S,*)$ dove $*$ è un'operazione interna di S

S è sia la struttura che l'insieme di sostegno

parte stabile

sia S strutt. algebrica con operaz interna $*$ e sia $T \subseteq S$.
T è parte stabile di S se $\forall a,b \in T \quad a * b \in T$

l'intersezione di parte stabile è parte stabile

semigruppo

sia S una struttura algebrica con $*$ operaz interna.
se $*$ è associativa $\Rightarrow$ la struttura si chiama semigruppo. ← struttura algebrica con operazione interna associativa

$u \in S$ è elemento neutro $\Leftrightarrow \forall a \in S \quad a * u = u * a = a$

monoide: semigruppo con elemento neutro.

simmetrizzabilità

sia S un monoide e u il suo elemento neutro.

un $x \in S$ è simmetrizzabile $\Leftrightarrow \exists y \in S \mid y * x = u = x * y$

$(G,*)$ è un gruppo $\Leftrightarrow G$ è un monoide e $\forall a \in G$
a è simmetrizzabile

semigruppo con elem. neutro e tutti suoi elem. sono simmetrizz.

gruppo abeliano: gruppo la cui operazione è
commutativa $a * b = b * a \ \forall a,b \in S$

sia $A \neq \emptyset$ e $+, \cdot$ 2 operazioni interne in A.
la terna $(A, +, \cdot)$ è un anello se:

1. $(A, +)$ è gruppo abeliano
2. $(A, \cdot)$ è semigruppo.
3. vale distributività rispetto add. dalla mult.

$$a(b+c) = ab+ac \quad (b+c)a = ba+ca$$

anello commutativo: quando mult. è commutativa

anello unitario: quando $\exists$ elem. neutro rispetto a mult. pric.

anello commutativo unitario: quando è un anello e vale commutatività

un anello unitario si dice campo se è un gruppo rispetto alla moltiplicazione privato dello 0

$(L, +, \cdot)$ è un campo $\iff$

1. $(L, +, \cdot)$ è anello commutativo unitario
2. $(L^*, \cdot)$ è gruppo abeliano

gli elementi di un campo si dicono scalari

siano $S, K \neq \emptyset$. un'operazione esterna μ su S con operatori in K è un'applicazione

$$\mu : K \times S \to S \qquad K: \text{scalari}$$

② spazi vettoriali

K-sp. vettoriale + proprietà

Sia K un campo e $A \neq \emptyset$

in A sono definite 2 operazioni, l'addizione (op. int.) e la moltiplicazione (esterne con operatori in K)

la struttura $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale sul campo K o un K-spazio vettoriale se si verificano:

1. $(A, +)$ gruppo abeliano.
2. $\alpha(\beta \underline{a}) = (\alpha\beta)\underline{a}$ $\quad \forall a\, b \in K \wedge \forall \underline{a} \in A$ → associatività mista
3. $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$ $\quad \forall a \in A$
4. $(\alpha+\beta)\underline{a} = \underline{a}\alpha + \beta\underline{a}$] distributività
5. $\alpha(\underline{a}+\underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b}$

$\underline{a}$ e $\underline{b} \in A$ vettori $\quad \alpha, \beta \in K$ scalari

A = sostegno della struttura

→ proprietà

1. $\alpha\underline{a} = \underline{0} \iff \alpha = 0 \vee \underline{a} = 0$ $\quad \forall \underline{a} \in A \wedge \forall \alpha \in K$
2. $(-1)\underline{a} = -\underline{a}$ $\quad \forall \underline{a} \in A$
3. $\lambda\underline{0} = \underline{0}$ $\quad \forall \lambda \in K$
4. $\lambda\underline{a} = 0 \iff \lambda \neq 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{0}$

una n-upla, ovvero una sequenza ordinata di vettori sarà anche detto sistema ordinato

n = ordine di S $\quad S = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

una n-upla associata a una n-upla di scalari $\in K^n$ definisce una combinazione lineare $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$

↓

la combinazione lineare è il vettore $\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{v}_j$ di S ovvero dei vettori $(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n)$ con coeff $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ — dipendenza di un vettore da un sistema

se $\alpha_1 = \alpha_n = 0 \Rightarrow \underline{0}$ è comb. lineare di $\underline{v}$

un sistema ordinato si dice linearmente dipendente se $\exists$ n upla di scalari $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in K^n$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{v}_j = \underline{0} \quad \text{(o parte leg)}$$

n-pla di scalari non banale: uno degli scalari $\neq 0$

→ relazione di dipendenza del sistema ordinato S

→ un sistema è costantemente dip. se $\underline{0} \in$ al sist o se nel sist. c'è una ripetizione

$\underline{0}$ dip. da ogni sist.

ogni vettore $\in$ al sist dip. dal sist. stesso.

sia $\underline{v}$ un vettore e $S=(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n)$ un sistema ordinato.
$\underline{v}$ dipende da S se $\exists$ n-pla di scalari
$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in K^n$ |

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{v}_j$$

dipendenza di un vettore da un sistema

un sist. è sicuro dipendente se

1. $\exists (\underline{v}_1, \underline{v}_2) | \underline{v}_1 = \underline{v}_2$ (c'è una ripetizione)
2. $\underline{0} \in S$
3. $\exists (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \wedge \lambda \in K | \underline{v}_1 \lambda = \underline{v}_2$ (prop.)

lemma dato il vettore $\underline{v}$ e ~~[illegible]~~ $S=(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n)$
$S' = (\underline{w}_1 \dots \underline{w}_n)$ due sist. ordinati
se $\underline{v}$ dipende da S e ogni vettore di S dip. da S' $\Rightarrow$ $\underline{v}$ dip. da S'
S dip. da S'. non è rilevante l'ordine

- se S è sottoins. di S' $\Rightarrow$ S dip. da S'

il sistema S è dipendente ~~[illegible]~~ $\Leftrightarrow$ $\exists$ vettore in S che dipende dai rimanenti

se S è dipendente e $S \subseteq S'$ $\Rightarrow$ S' è dip.
(pt. lib.) indipendenza lineare
il sistema $S=(\underline{v}_1, \underline{v}_n)$ ordinato si dice indip. se l'unica combinazione lineare nulla di S è quella banale cioè a coefficienti tutti $=0$
$\downarrow$ deve essere vero che $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{v}_j = \underline{0} \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j$

indipendente = parte libera
l'ordine non è rilevante
$\underline{0}$ non $\in S$
i vettori del sist. sono a 2 a 2 distinti

lemma: $S=[\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]$, $S'=[\underline{w}_1 \dots \underline{w}_n]$
suppongo S indip. e $S \subseteq S'$
S è indip. massimale in S' $\Leftrightarrow$ ogni vettore di S' dip. da S.

quindi se S è parte libera e se $\bar{S} \subseteq R \rightarrow \bar{S}$ parte leg.

Basi e dimensione

sist. di generatori

Se sistema ordinato $S=(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n)$ si dice sistema di generatori di V se ogni vettore di V dip. da S

quindi S genera V o i vettori $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_m$ generano V o i vettori $(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_m)$ sono generatori di V

$V = L(S) = L(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_m)$

Sp. vett. finitam. generato se ammette un sist. di generatori

se ammette un num. finito di sist. di generatori

$K[x]$ (polinomi) non f.g.

→ è un sistema di vettori che permette di scrivere tutti i vettori dello spazio, con comb. lin. scelti.

base ordinata / riferimento: un sist. ord. $B=(\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n)$ si dice base se è ind. dip. e genera V

quindi se è un sist. di gener. e se è post-e libero lo spazio vettoriale non ha basi perché in esso non ci sono sist. indipendenti

uno sp. vett. non f.g. non ha basi perché non ha sist. di generatori

Lemma 4

Considerato un V K-sp. vett. e $S \subseteq V$, S è post-e dipendente $\iff \exists \underline{v} \in S \mid \underline{v}$ dipende da $S \setminus \{\underline{v}\}$

utile se fa per esempio come comb. lineare

Dim $\exists (\alpha_1 \dots \alpha_m)$ non banale $\quad e\ \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_m\underline{v}_m = \underline{0}$

so che $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_i \in K$ $\exists \alpha_i^{-1} \mid -\alpha_1\underline{v}_1 = \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_m\underline{v}_m$

$-\alpha_i \in K$, $-\alpha_i \neq 0$

moltiplico ogni membro per $(-\alpha)^{-1}$

$\underline{v}_1 = \lambda\underline{v}_i \implies (-\alpha)^{-1}(-\alpha_1)\underline{v}_1 = (-\alpha_1)^{-1}\alpha_2\underline{v}_2 + (-\alpha_1)^{-1}\alpha_m \underline{v}_m$

$\implies$ so dim. che $\underline{v}_1 \in L(S \setminus \{\underline{v}\})$

sist. di generatori minimale $\iff$ se è sist. di gen. e $\forall \bar{S} \subset S$, $\bar{S}$ non è sist. di generatori

dice che è sist. di gen minimale sul fatto che se tolgo un vettore non ho + un sistema che genera V.

↝ non è minimale se ci sono + di un vettore tolto un sistema più piccolo che può ancora generare V