OBIETTIVO: costruzione dei numeri reali — ad ogni TEORIA → un ASSIOMA

LOGICA MATEMATICA → si intende quella parte della logica applicata all'analisi della validità del "ragionamento matematico", in quanto la logica è in grado di decidere se un ragionamento è corretto o meno.

PROPOSIZIONE → chiamato anche enunciato è un'affermazione alla quale si può far corrispondere il valore VERO (V) o FALSO (F). Con certezza, oggettivo).

ES: "5<2" è una PROPOSIZIONE FALSA
"Antonio è bello" non è una proposizione perché l'oggettivo 'bello' è una condizione soggettiva.

CONNETTIVI LOGICI → mediante questi è possibile ottenere da singole proposizioni, delle proposizioni più complesse.

- ¬ NEGAZIONE (si legge "non")
- ∧ CONGIUNZIONE (si legge "e")
- ∨ DISGIUNZIONE (si legge "o" oppure "vel")
- ⇒ IMPLICAZIONE (si legge "implica")
- ⇔ EQUIVALENZA o DOPPIA IMPLICAZIONE (si legge "se e solo se")

PROPOSIZIONI COMPONENTI → p e q

TABELLA DI VERITÀ → rappresentano le regole attraverso le quali individuare il valore logico della PROPOSIZIONE COMPOSTA

1) NEGAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE ($\bar{p}$)

È un'altra proposizione che è VERA se p è FALSA, ed è FALSA se p è VERA.

$\bar{p}$ = non p → si ottiene mettendo il "non" vicino al verbo

TABELLA DI VERITÀ →

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

ES: "Parigi è capitale d'Italia" è una prop. FALSA
"Parigi non è capitale d'Italia" è una p. VERA

2) CONGIUNZIONE LOGICA ($p_1 = p \wedge q$)

È una proposizione che è VERA solo ed esclusivamente se entrambe le proposizioni sono VERE.

TABELLA DI VERITÀ →

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ES: "Parigi è capitale della Francia" → p
"5<2" → q
"Parigi è cap. Francia e 5<2" → p ∧ q
↳ È FALSA!

3) DISGIUNZIONE LOGICA ($P_1 = P \vee Q$)

É una proposizione che é VERA se almeno una delle due é VERA.

TABELLA DI VERITÀ →

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

LEGGI DI DE MORGAN

Stabiliscono relazioni di EQUIVALENZA tra gli operatori di CONGIUNZIONE e DISGIUNZIONE LOGICA.

1 LEGGE:

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	P ∨ Q	$\overline{P \vee Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

$\overline{P \vee Q}$: negazione di una disgiunzione logica

$\bar{P} \wedge \bar{Q}$: congiunzione logica delle negazioni delle proposizioni

CONCIDONO!

$\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$

→ É in grado di trasformare le DISGIUNZIONI logiche in CONGIUNZIONI logiche.

($\overline{P \vee Q}$ = "é una proposizione che NON é vera (é FALSA) se almeno una delle due é vera.")

2 LEGGE:

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	P ∧ Q	$\overline{P \wedge Q}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

$\overline{P \wedge Q}$: negazione di una cong. log.

$\bar{P} \vee \bar{Q}$: disgiunzione log. delle negazioni delle proposizioni

CONCIDONO!

$\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$

→ É in grado di trasformare le CONGIUNZIONI logiche in DISGIUNZIONI logiche.

($\overline{P \wedge Q}$ = "é una proposizione che NON é vera (é FALSA) se entrambe le prop. sono vere.")

4) IMPLICAZIONE LOGICA ($P_1 = P \Rightarrow Q$)

É una proposizione che é FALSA solo ed esclusivamente se P é VERA e Q é FALSA.

TABELLA DI VERITÀ →

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P: condizione SUFFICIENTE per il verificarsi di Q

Q: condizione NECESSARIA per il verificarsi di P.

5) **EQUIVALENZA LOGICA** ($P_1 = P <=> q$)
(o doppia implicazione)

É una proposizione che é FALSA solo ed esclusivamente se p e q hanno lo stesso valore

TABELLA DI VERITÁ →

p	q	$P <=> q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p: condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE per q
q: condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE per p.

DIMOSTRARE UNA DOPPIA IMPLICAZIONE

$P_1 = P <=> q$
quindi

$(n => n^2)$ (ipotesi) $P => q$ (tesi) $\wedge$ (ipotesi) $q => P$ (tesi) $(n^2 => n)$

ES: Tesi → n^2 é pari
Ipotesi → n é pari

se n é pari ciò implica che tra i suoi divisori ci deve essere il 2

quindi $n = 2k \quad k \in N$

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

il 2 c'é, quindi n^2 é pari

DIMOSTRAZIONE DIRETTA O COSTRUTTIVA

ES: Tesi → n é pari (viene negata)
Ipotesi → n^2 é pari (valida)

[**DIMOSTRAZIONE INDIRETTA O PER ASSURDO**
neghiamo la tesi ottenendo una negazione di una proposizione accettata prima per vera perché dimostrata precedentemente.]

Negazione della tesi → n non é pari
n é dispari

affinché n sia dispari, bisogna aggiungere una cifra per far diventare n da pari, dispari.

$n = 2k+1 \quad k \in N$

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

il numero é chiaramente dispari
↳ **É ASSURDO!**

GRANDEZZE COMMENSURABILI → due grandezze lo sono tra loro se é possibile individuare la misura di una grandezza rispetto all'altra, ossia il numero di volte che la prima grandezza contiene la seconda cioè il RAPPORTO tra la prima e la seconda gran.

Chiamando S la prima grandezza e U la seconda, S é un multiplo razionale di U e quindi può essere scritto come un numero razionale per U. $U = k \cdot S$

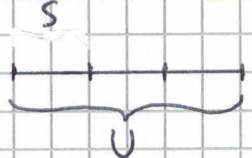
ES:

$d^2 = p^2 + p^2 = 2p^2 \rightarrow d = \sqrt{2t^2} \rightarrow d = \sqrt{2}t$

é un numero irrazionale

Quindi la diagonale e il lato di un quadrato sono due GRANDEZZE INCOMMENSURABILI

ES:



$U = 3 \cdot S$ oppure $\frac{U}{S} = 3$

$S = \frac{m}{n} \cdot U$ = numero razionale

TEOREMA → non esiste nessun numero razionale il cui quadrato è uguale a 2.

DIMOSTRAZIONE → RAGIONAMENTO PER ASSURDO

1) Bisogna NEGARE LA TESI → esiste un numero razionale $\left(\frac{m}{n}\right)$ il cui quadrato è uguale a 2.

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ poiché m e n sono due numeri razionali, li prendiamo ridotti ai minimi termini, considerandoli quindi due NUMERI PRIMI (perché si possono sempre semplificare i fattori che hanno in comune).

2) $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \iff m^2 = \underbrace{2n^2}$

↳ il 2 c'è quindi m^2 è un numero pari

3) Per DIMOSTRAZIONE PRECEDENTE (←)

se m^2 è pari, allora m è pari, quindi $\boxed{m = 2k}$

4) Andiamo a sostituire $m = 2k$ in $m^2 = 2n^2$

$4k^2 = 2n^2 \rightarrow n^2 = \underbrace{2k^2}$

↳ il 2 c'è quindi è un numero pari

5) Per DIMOSTRAZIONE PRECEDENTE (←)

se n^2 è pari, allora n è pari, quindi $\boxed{n = 2k}$

SIA m CHE n HANNO COME FATTORE IN COMUNE IL NUMERO 2, MA VISTO CHE INIZIALMENTE ABBIAMO PRESUPPOSTO CHE I DUE NUMERI FOSSERO PRIMI

↓

É ASSURDO!

Ciò ci servirà quando vogliamo dimostrare che il campo dei numeri razionali non è un campo completo.

$P(x,y)$

PREDICATO + PARAMETRO/VARIABILE = PROPOSIZIONE

PREDICATO
insieme di proposizioni che dipendono da uno o più parametri

QUANTIFICATORI
danno un'informazione su quanto è grande l'estensione in cui è valido un predicato

- UNIVERSALE (sempre)
  - $\forall$ "per ogni"
- ESISTENZIALE (qualcosa)
  - $\exists$ "esiste almeno un"
  - $\exists!$ "esiste ed è unico"

ES: $\exists x : 2x+1>0$ → esiste almeno una x tale che $2x+1$ è vera
infatti è vera per $x > -1/2$

$\forall x : x^2+1>0$ → per ogni x tale che $x^2+1>0$ è vera
è sempre vera, è valida sempre perché il quadrato è sempre positivo

$\exists! x : 2x+1=0$ → esiste ed è unica la x tale che $2x+1=0$ è vera
infatti è vera solo ed unicamente per $x=-1/2$

NEGAZIONE DEI QUANTIFICATORI (aggiungere "NON")

1) Nel caso in cui abbiamo 1 QUANTIFICATORE si può passare dal quantificatore universale al quantificatore esistenziale e da quello esistenziale all'universale

Proposizione → $\forall x : P(x)$ è vera

Negazione → NON per ogni x $P(x)$ è vera
non è vera per tutti x quindi
esiste almeno una x per cui $P(x)$ è falsa

NON "$\forall x : P(x)$" $\Leftrightarrow \exists x :$ NON "$P(x)$"

Il quantificatore universale negato diventa quantificatore esistenziale e viceversa.

NON "$\exists x : P(x)$" $\Leftrightarrow \forall x :$ NON "$P(x)$"

2) Nel caso in cui abbiamo 2 o più QUANTIFICATORI non si può passare dal quantificatore universale a quello esistenziale e viceversa.
↳ Perché non si ottiene lo stesso significato

Predicato → $\forall y, \exists x : P(x,y)$ Negazione → $\exists y, \forall x : P(x,y)$

ES: $f : R \to R$ NEGAZIONE → bisogna negare uno alla volta (scalando) tutti i quantificatori

f cont. in $x_0 \in R \Leftrightarrow P =$ "$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0-\delta ; x_0+\delta) : |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$"

f NON cont. in $x_0 \in R \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ NON "$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0-\delta ; x_0+\delta) : |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$"

f NON cont. in $x_0 \in R \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$ NON "$\forall x \in (x_0-\delta ; x_0+\delta) : |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$"

f NON cont. in $x_0 \in R \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \in (x_0-\delta ; x_0+\delta) \wedge |f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon$
non

TEORIA DEGLI INSIEMI

INSIEME → è un concetto che non ha una propria definizione pertanto bisogna assumerlo come CONCETTO PRIMITIVO.
- viene, all'occorrenza, chiamato anche collezione, aggregato, famiglia, classe, popolazione
- si indica con le LETTERE MAIUSCOLE: A, B, C, ...

ELEMENTI → oggetti che formano un insieme, anch'esso è un CONCETTO PRIMITIVO.
- si indicano con le LETTERE MINUSCOLE: a, b, c, ...

INSIEME VUOTO → è un insieme che non ha elementi e si indica con $\emptyset$ ed è sempre UNO
- è un SOTTOINSIEME di tutti gli insiemi ($\emptyset \in \mathcal{P}(A)$)

APPARTENENZA → $\in$ es: $a \in A$ "l'elemento a appartiene all'insieme A"
$\notin$ es: $a \notin A$ "l'elemento a NON APPARTIENE all'insieme A"

INDIVIDUAZIONE E RAPPRESENTAZIONE DI UN INSIEME

→ 3 MODI: 1) ELENCARE GLI ELEMENTI CHE APPARTENGONO ALL'INSIEME
Solitamente si usa quando l'insieme è definito da un numero finito di elementi, gli elementi non devono essere ripetuti e non importa l'ordine.

ES: $A = \{a, b, c\}$

2) INDICARE LA PROPRIETÀ O LE PROPRIETÀ CHE CARATTERIZZANO GLI ELEMENTI DELL'INSIEME tramite la PROPRIETÀ CARATTERISTICA che è un PREDICATO,

$$A = \{x : P(x)\}$$

ES: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 3\}$ si legge: "A è l'insieme dei numeri naturali x tali che x è maggiore uguale di 3"

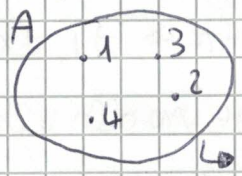
$A = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 0\} = \mathbb{N}$

$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 \leq 0\} = \emptyset$ in questo caso $P(x) =$ "$x^2 + 1 \leq 0$"
↳ perché non è mai vero

$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{Z}$

3) TRAMITE RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI DIAGRAMMI DI EULERO-VENN nei quali gli elementi degli insiemi sono racchiusi dentro linee chiuse.

ES:



↳ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

CARDINALITÀ → chiamata anche "potenza" o "numerosità" di un insieme finito si intende il numero dei suoi elementi.

$$|A| = n \text{ elementi} = 2^n$$

ES: $A = \{1, 2, 3\}$ $|A| = \#A = \text{card}(A) = 2^3$

SOTTOINSIEMI → Si dice che l'insieme B è sottoinsieme dell'insieme A se tutti gli elementi di B appartengono anche ad A.

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

si legge "sottoinsieme" "è incluso" "è contenuto"

in questo caso B può coincidere con A, infatti se risulta anche che $A \subseteq B$ allora gli insiemi A e B coincidono → $A = B$

↳ RELAZIONE DI UGUAGLIANZA TRA DUE INSIEMI

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A \quad \exists x \in A : x \in B$$

si legge "contenuto strettamente"

in questo caso B è diverso da A → $A \neq B$

ES: $A = \mathbb{Z}$ quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$B = \mathbb{N}$

INSIEME DELLE PARTI → Dato un insieme A si dice insieme delle parti di A l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di X.

↳ si indica con: $\mathcal{P}(A)$

↳ N.B. qui bisogna sempre tener conto dell'insieme vuoto $\emptyset$

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

ES: $A = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \underbrace{\{1,2,3\}}_{A}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

INTERSEZIONE → Si dice intersezione di due insiemi A e B l'insieme di elementi che appartengono sia ad A che a B. È l'insieme C comune ad A e B.

↳ si indica: $A \cap B$ e si legge "intersezione" o "intersecato"

$$*A \cap B = C = \{x : \underbrace{"x \in A \text{ e } x \in B"}_{\text{predicato } P(x)}\}$$

Diagramma di Eulero-Venn

ES: $B \subseteq A$ $A \cap B = B$

$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

GODE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA

DISGIUNTI → Quando due insiemi non hanno elementi in comune $A \cap B = \emptyset$

DIFFERENZA → Considerati due insiemi A e B, l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B

$$A \setminus B$$

UNIONE → Si dice unione di due insiemi A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad A o B.

$$A \cup B = C = \{x : \underbrace{x \in A \text{ o } x \in B}_{\text{predicato } P(x)}\}$$ si legge "unione" o "unito"

É l'insieme C uguale all'insieme delle x tale che x appartiene ad A oppure x appartiene a B.

(prendere tutti gli elementi che stanno in A e B e metterli insieme)

ES: $N \cup Z = Z$

$A = \{a, c, d\}$ $B = \{a, b\}$ → $A \cup B = \{a, b, c, d\}$

GODE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELL'UNIONE RISPETTO ALL'INTERSEZIONE

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Si opera come se fosse un'equazione/prodotto matematico

VOGLIAMO VERIFICARE L'UGUAGLIANZA TRA I DUE INSIEMI

Due insiemi sono uguali quando uno è contenuto nell'altro e l'altro è contenuto nell'uno.

$$X = Y = \underbrace{X \subseteq Y}_{\text{I}} \text{ e } \underbrace{Y \subseteq X}_{\text{II}}$$

DIMOSTRAZIONE

I) $\subseteq$ Applichiamo le definizioni di unione e intersezione:

$X \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow X \in A \text{ o } (X \in B \cap C) \Rightarrow X \in A \text{ o } X \in B \text{ e } X \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in A \cup B \text{ e } X \in A \cup C \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$ → I DUE INSIEMI SONO UGUALI!

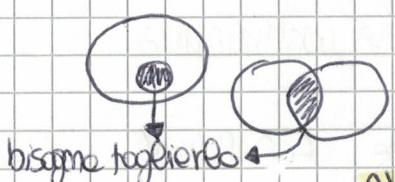
II) $\supseteq$ Applichiamo le definizioni di unione e intersezione:

$X \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow X \in (A \cup B) \text{ e } X \in (A \cup C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (X \in A \text{ o } X \in B) \text{ e } (X \in A \text{ o } X \in C) \Rightarrow X \in A \text{ o } X \in (B \cap C) \Rightarrow A \cup (B \cap C)$

raccolto e faccio comune

INSIEME COMPLEMENTARE → Dati due insiemi A e B si definisce COMPLEMENTO DI B oppure INSIEME COMPLEMENTARE DI B RISPETTO AD A l'insieme delle x appartenenti ad A tale che x non appartenga a B.



→ Si indica con C_B oppure $\overline{B}_A$ o ancora $A \setminus B$ o $A - B$

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

Se $A \subseteq X$ il complemento diventa → $C_A = X - A$ o $X \setminus A$ (consideriamo tutto x e ci togliamo A)

ES: $X = Z$, $A = N$ $C_A = \{-m, -(m) \in N\}$ (perché questo deve essere positivo, quindi appartenente a N, altrimenti sarebbe $-(-m)$, ossia $+m$)

↳ $Z(-2, -1, 0, 1, 2)$ $N(0, 1, 2)$ quindi rimangono solo i numeri negativi

INSIEME QUOZIENTE → è un insieme costituito dalle CLASSI DI EQUIVALENZA

↳ $S/\sim = \{[x] : x \in S\}$

CLASSE DI EQUIVALENZA DI x → è costituito da tutti gli elementi che stanno in S che devono essere in relazione con S.
$[_]$

TEOREMA

La classe di equivalenza di x è uguale alla classe di equivalenza di y se e solo se x è in relazione con y. ↳ coincidono

Quindi le classi di equivalenza di un insieme costituiscono una PARTIZIONE di S.

$$[x] = [y] \iff x \sim y$$

Se consideriamo l'INSIEME DELLE PARTI DI S e consideriamo l'INTRUSIONE del sottoinsieme, questa è UNA RELAZIONE D'ORDINE.

$(P(S), \subseteq)$ $\quad A R B \iff A \subseteq B$ è ANTISIMMETRICA $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \} A = B$

è TRANSITIVA

MA NON È UNA RELAZIONE D'ORDINE TOTALE perché sono due insiemi che non si intersecano e quindi non sono confrontabili tra di loro perché o $a > b$ o $b > a$
È UNA RELAZIONE D'ORDINE NON TOTALE.

MINIMO → $m \in S$ (sottoinsieme) è il minimo rispetto alla relazione $\leq$

$\iff \forall x \in S \quad m \leq x$

MASSIMO → $M \in S$ è il massimo rispetto alla relazione $\leq$

$\iff \forall x \in S \quad x \leq M$

} INSIEME UNICO

INSIEME BEN ORDINATO → un insieme S con una relazione si di ben ordinato se ogni suo sottinsieme è dotato di MINIMO.

ES: $(\mathbb{N}, \leq)$ $\mathbb{N}$ con la relazione usuale: $x \leq y \iff y - x \geq 0 \quad x, y \in \mathbb{N}$

↳ è DOTATO di MINIMO quindi è un insieme ben ordinato

$(\mathbb{Z}, \leq)$ rispetto alla relazione usuale: $x \leq y$ non è dotato di minimo quindi

↳ NON È un insieme BEN ORDINATO

INSIEME UNICO → un insieme ha un UNICO MASSIMO e un UNICO MINIMO.

DIMOSTRARE CHE IL MINIMO È UNICO PER ASSURDO

Supponiamo quindi che ci siano 2 minimi: m_1 e m_2
per definizione $m_1, m_2 \in S$
applicando la definizione di minimo: ogni x che sta in S è più grande di $\begin{cases} m_1 \leq m_2 \\ m_2 \leq m_1 \end{cases}$

Quindi necessariamente $m_1 = m_2$ quindi IL MINIMO È UNICO!
perché ANTISIMMETRICA

DA ORA IN POI CI TROVIAMO SEMPRE NEL CASO DI INSIEMI TOTALMENTE ORDINATI

MAGGIORANTE DI UN SOTTOINSIEME → consideriamo un insieme S con una relazione d'ordine totale, consideriamo un sottoinsieme A di S

$(S\leq)$ $A\subseteq S$ $x\in S$ è un maggiorante di $A \iff \forall a\in A \quad a\leq x$

ES: $(\mathbb{Q}\leq)$

consideriamo la relazione d'ordine usuale: $x\leq y \iff y-x\geq 0$

consideriamo l'insieme $A=\left\{\frac{1}{m}, m\in\mathbb{N}\right\}$

considero il numero $1\in\mathbb{Q}$ è chiaro che sia $\frac{1}{m}\leq 1 \quad \forall m\in\mathbb{N}$

Quindi tutti gli elementi che stanno in A sono più piccoli di 1

↳ IL MAGGIORANTE NON È UNICO.

MINORANTE DI UN SOTTOINSIEME → consideriamo un insieme S con una relazione d'ordine totale, consideriamo un sottoinsieme A di S

$(S\leq)$ $A\subseteq S$ $x\in S$ è un minorante di $A \iff \forall a\in A \quad x\leq a$

ES: $A=\left\{\frac{1}{m}, m\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{Q}$ $\quad x\leq x$

↳ $\frac{1}{m}$ = numeri positivi escluso lo 0 → $\frac{1}{m}>0 \quad \forall m\in\mathbb{N}$

↳ QUINDI 0 È UN MINORANTE

LIMITATO SUPERIORMENTE → un sottoinsieme $A\subseteq S$ è limitato superiormente quando

$\iff$ AMMETTE ALMENO UN MAGGIORANTE

LIMITATO INFERIORMENTE → un sottoinsieme $A\subseteq S$ è limitato inferiormente quando

$\iff$ AMMETTE ALMENO UN MINORANTE

ILLIMITATO SUPERIORMENTE → un sottoinsieme $A\subseteq S$ è illimitato superiormente quando

$\sup A=+\infty$ $\iff$ È SPROVVISTO DI MAGGIORANTE

ILLIMITATO INFERIORMENTE → un sottoinsieme $A\subseteq S$ è illimitato inferiormente quando

$\inf A=-\infty$ $\iff$ È SPROVVISTO DI MINORANTE

ES: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}$ $\quad x=3,4$ quindi $\mathbb{N}$ essendo sprovvisto di maggiorante è ILLIMITATO SUPERIORMENTE

$m\leq x$ $\quad m=4$

$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ anche $\mathbb{Z}$ è un insieme ILLIMITATO SUPERIORMENTE

LIMITATO → un sottoinsieme si dice limitato se ammette almeno 1 MAGGIORANTE e MINORANTE

$\iff \forall a\in A \quad K\leq a\leq h$ dove h → maggiorante K → minorante $h,K\in S$