

# **Metodi Matematici per l'Ingegneria**

Angelo Alvino

A.A.2016-17



# Indice

<b>1</b>	<b>Funzioni olomorfe</b>	<b>5</b>
1.1	La funzione $\exp$ in campo complesso . . . . .	5
1.2	Derivabilità in campo complesso . . . . .	8
1.3	Serie di potenze . . . . .	11
1.4	Il teorema di Cauchy . . . . .	13
1.5	Analiticità . . . . .	20
1.6	Le funzioni elementari in campo complesso . . . . .	26
1.7	Sviluppi in serie di Laurent . . . . .	30
1.8	Il teorema dei residui . . . . .	34
1.9	Applicazioni del teorema dei residui . . . . .	36
1.10	La $\mathcal{L}$ -trasformata . . . . .	44
1.11	Famiglie di funzioni olomorfe . . . . .	46
<b>2</b>	<b>La funzione Gamma</b>	<b>51</b>
2.1	Misura della sfera di $\mathbb{R}^N$ . . . . .	51
2.2	La formula di Stirling . . . . .	53
2.3	Prolungamento analitico di Gamma . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Spazi di Banach e spazi di Hilbert</b>	<b>61</b>
3.1	Richiami . . . . .	61
3.2	Esempi di spazi funzionali . . . . .	66
3.2.1	Spazi di funzioni . . . . .	66
3.2.2	Spazi di successioni . . . . .	67
3.3	Separabilità e compattezza . . . . .	71
<b>4</b>	<b>L'integrale di Lebesgue</b>	<b>75</b>
4.1	Introduzione . . . . .	75
4.2	Misura secondo Lebesgue . . . . .	78
4.3	Integrale secondo Lebesgue . . . . .	80
4.4	Passaggio al limite sotto il segno di integrale . . . . .	85
4.5	Gli spazi $L^p$ . . . . .	91

<b>5</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>99</b>
5.1	Motivazioni . . . . .	99
5.1.1	L'equazione del calore . . . . .	99
5.1.2	L'equazione delle corde vibranti . . . . .	101
5.1.3	L'equazione della membrana elastica . . . . .	102
5.2	Serie trigonometriche . . . . .	103
5.3	Completezza del sistema trigonometrico . . . . .	110
5.4	Convergenza puntuale . . . . .	113
5.5	Derivazione termine a termine . . . . .	120
5.6	Convergenza uniforme . . . . .	122
5.7	Applicazioni . . . . .	125
<b>6</b>	<b>La trasformata di Fourier</b>	<b>129</b>
6.1	Motivazione . . . . .	129
6.2	Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	133
6.3	Formule di inversione . . . . .	137
6.4	La trasformata di Fourier in $L^2$ . . . . .	140
6.5	Applicazioni . . . . .	142
<b>7</b>	<b>La trasformata di Laplace</b>	<b>147</b>
7.1	Definizione ed esempi . . . . .	147
7.2	La formula di inversione . . . . .	152
7.3	Applicazione alle equazioni differenziali . . . . .	153
<b>8</b>	<b>Distribuzioni</b>	<b>157</b>
8.1	Definizioni ed esempi . . . . .	157
8.2	Derivata di una distribuzione . . . . .	161
8.3	Distribuzioni temperate . . . . .	164
8.4	Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	167
8.5	Distribuzioni periodiche . . . . .	169
<b>A</b>	<b>Il teorema di Riesz</b>	<b>173</b>
<b>B</b>	<b>Il teorema di Ascoli-Arzelà</b>	<b>175</b>
<b>C</b>	<b>Il teorema di approssimazione di Weierstrass</b>	<b>177</b>
<b>D</b>	<b>Partizione dell'unità</b>	<b>181</b>
<b>E</b>	<b>Il teorema della divergenza</b>	<b>185</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>191</b>

# Capitolo 1

## Funzioni olomorfe

### 1.1 La funzione $\exp$ in campo complesso

Indichiamo con  $\mathbb{C}$  il campo dei numeri complessi. Un numero complesso viene solitamente rappresentato in forma algebrica nel modo seguente

$$z = x + iy = \Re(z) + i \Im(z).$$

Daremo per note le principali proprietà di  $\mathbb{C}$ ; limitiamoci qui a ricordare che per “modulo” di  $z$  si intende la quantità

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e che valgono le seguenti disuguaglianze triangolari

$$(1.1) \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

**Definizione 1.1.1.** - Si dice che una successione  $\{z_n\}$  di numeri complessi converge a  $z$ , in simboli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z,$$

se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0.$$

Si può facilmente verificare che la successione di termine generale

$$z_n = x_n + iy_n$$

converge a  $z = x + iy$  se e solo se la successione  $\{(x_n, y_n)\}$  converge in  $\mathbb{R}^2$  a  $(x, y)$ . Ciò equivale a dire che  $\mathbb{C}$  può essere identificato dal punto di vista topologico con  $\mathbb{R}^2$ .

Consideriamo la serie di potenze

$$(1.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Si può dimostrare che la successione delle somme parziali della (1.2) converge per ogni  $z$ . Poiché la sua somma è  $\exp z$  se  $x \in \mathbb{R}$  è allora ragionevole porre

$$(1.3) \quad \exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dimostriamo la seguente proprietà

$$(1.4) \quad e^{z+w} = e^z e^w$$

ben nota in campo reale. A tal fine richiamiamo il seguente risultato relativo alle successioni medie aritmetiche.

**Proposizione 1.1.1.** - *Sia  $\{a_n\}$  una successione e  $a$  il suo limite; allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Come conseguenza della prop. 1.1.1 si ha il seguente risultato.

**Proposizione 1.1.2.** - *Siano  $a, b$  i limiti delle successioni  $\{a_n\}, \{b_n\}$ ; si ha*

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = a b.$$

*Dimostrazione.* Abbiamo

$$(1.6) \quad \frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} b + \frac{a_1(b_n - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n}.$$

Per la prop. 1.1.1 il primo termine a secondo membro nella (1.6) ha per limite  $a b$ . Per la proprietà triangolare (1.1) risulta inoltre

$$\left| \frac{a_n(b_1 - b) + \cdots + a_1(b_n - b)}{n} \right| \leq \left( \sup_n |a_n| \right) \frac{|b_1 - b| + \cdots + |b_n - b|}{n}.$$

Sempre per la prop. 1.1.1 l'ultimo termine in (1.6) è infinitesimo. Si è ottenuto in tal modo la (1.5).  $\square$

**Definizione 1.1.2.** - *Per serie prodotto secondo Cauchy di due serie di termini generali  $a_k$  e  $b_k$  si intende la serie il cui termine  $n$ -mo è*

$$(1.7) \quad c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}.$$

**Proposizione 1.1.3.** - *Se le serie di termini generali  $a_k$  e  $b_k$  sono assolutamente convergenti tale è anche la serie prodotto secondo Cauchy e si ha*

$$(1.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right).$$

*Dimostrazione.* L'assoluta convergenza della serie prodotto secondo Cauchy discende dalla disuguaglianza di semplice verifica

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k| \right) \left( \sum_{k=1}^n |b_k| \right).$$

Siano  $A_n, B_n, C_n$  e  $A, B, C$  le somme parziali e le somme delle serie di termini generali  $a_k, b_k, c_k$ . Essendo

$$C_n = a_1 B_n + \cdots + a_n B_1$$

risulta

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \frac{A_n B_1 + \cdots + A_1 B_n}{n}.$$

Basta allora utilizzare le prop. 1.1.1 e 1.1.2 per ottenere la (1.8).  $\square$

**Osservazione 1.1.1.** - La (1.8) sussiste anche se si assume che una sola delle due serie sia assolutamente convergente. Il risultato non vale se entrambe le serie sono solo convergenti. A tale proposito basta considerare il caso

$$a_k = b_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Procediamo ora alla verifica della (1.4). Si ha

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) \\ &\text{(per la (1.8))} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &\text{(per la formula del binomio di Newton)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

La serie (1.3) è assolutamente convergente; quindi è possibile riordinare i suoi termini senza alterarne la somma. Si ottiene pertanto la seguente relazione

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left( 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \right) + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots \right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

da cui, per la (1.4),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Si ottengono in tal modo le note formule di Eulero

$$(1.9) \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

che suggeriscono le seguenti estensioni a  $\mathbb{C}$  delle funzioni trigonometriche seno e coseno

$$(1.10) \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ovvero

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

## 1.2 Derivabilità in campo complesso

Se  $z = x + iy$  sia

$$(1.11) \quad f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

una funzione definita in un aperto  $A$  del piano complesso.

Si può introdurre in modo del tutto naturale la nozione di convergenza e di continuità. Occupiamoci di estendere quella di derivata.

**Definizione 1.2.1.** - Si dice che  $f$  è derivabile in  $z$  se il rapporto incrementale

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

è convergente, al tendere di  $\Delta z$  a zero, ad un complesso che prende il nome di derivata di  $f$  in  $z$  e si denota con uno dei simboli

$$f'(z), \quad \frac{df}{dz}(z).$$

Se  $f$  è derivabile in ogni punto di  $A$  si dice che  $f$  è "olomorfa" in  $A$ .

È appena il caso di osservare che continuano a sussistere le regole di derivazione valide per la derivata in campo reale relative alla derivata della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni, alla derivata di una funzione composta e a quella dell'inversa.

**Teorema 1.2.1.** - Se  $f$  è olomorfa in  $A$  allora  $u$  e  $v$  sono differenziabili. Valgono inoltre le seguenti identità (equazioni di Cauchy-Riemann)

$$(1.12) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$



*Dimostrazione.* Si incrementi o solo la parte reale o solo la parte immaginaria di  $z$ . Si ha allora

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{ik}$$

da cui

$$(1.13) \quad f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

ovvero

$$(1.14) \quad f' = u_x + i v_x = v_y - i u_y.$$

Abbiamo in tal modo ottenuto le (1.12).

Resta da verificare la differenziabilità di  $u, v$  ovvero dell'applicazione del piano in sé

$$(1.15) \quad F : (x, y) \longrightarrow (u(x, y), v(x, y)).$$

Ricordiamo che  $F$  è differenziabile se esiste un funzionale lineare  $J$  di  $\mathbb{R}^2$  in sé tale che

$$(1.16) \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\|F(x+h, y+k) - F(x, y) - J(h, k)\|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

dove  $\|\cdot\|$  indica la norma euclidea in  $\mathbb{R}^2$ . È noto che  $J$  si rappresenta mediante la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Per le (1.12) si ha allora

$$\begin{aligned} J(h, k) &= \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (u_x h - v_x k, v_x h + u_x k) \\ &= (u_x + i v_x)(h + ik) \end{aligned}$$

da cui, per la (1.14), posto  $\Delta z = h + ik$ ,

$$J(h, k) = f'(z) \Delta z.$$

Pertanto il numeratore in (1.16) diventa

$$|f(z + \Delta z) - f(z) - f'(z) \Delta z|.$$

La (1.16) discende dall'olomorfia di  $f$ . □

**Osservazione 1.2.1.** - Dalle (1.12) si ha

$$(1.17) \quad \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'|^2.$$

Il determinante a primo membro è lo jacobiano della trasformazione (1.15).

Ulteriori semplici conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann (1.12) sono elencate nella seguente

**Proposizione 1.2.1.** - Sia  $f$  olomorfa in un aperto  $A$  connesso.

- Se  $f'$  è identicamente nulla in  $A$  allora  $f$  è costante;
- se la parte reale o quella immaginaria di  $f$  è costante allora  $f$  è costante;
- se il modulo di  $f$  è costante allora anche  $f$  è costante.

**Esempio 1.2.1.** - La funzione

$$z \longrightarrow \bar{z} = x - iy$$

non è olomorfa in quanto non risultano soddisfatte le (1.12).

Più in generale, se  $f$  è olomorfa tale non può essere  $\bar{f}$  a meno che  $f$  non sia costante.

**Esempio 1.2.2.** - Poiché

$$(1.18) \quad (z + \Delta z)^n - z^n = \Delta z [(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-1}]$$

si ha

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n z^{n-1}.$$

Quindi, come nel caso reale, la derivata di  $z^n$  è  $n z^{n-1}$ .

In realtà le condizioni di Cauchy-Riemann caratterizzano le funzioni olomorfe. Sussiste infatti il seguente risultato.

**Teorema 1.2.2.** - Se  $u, v$  sono differenziabili in  $A$  e se valgono le (1.12) allora la funzione  $f = u + i v$  è olomorfa in  $A$ .

*Dimostrazione.* Essendo  $u, v$  differenziabili si ha

$$u(x + h, y + k) - u(x, y) = u_x(x, y)h + u_y(x, y)k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

$$v(x + h, y + k) - v(x, y) = v_x(x, y)h + v_y(x, y)k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right).$$

Se  $z = x + i y$  e  $\Delta z = h + i k$  per le (1.12) risulta

$$f(z + \Delta z) - f(z) = [u_x(x, y) + i v_x(x, y)] \Delta z + o(|\Delta z|)$$

da cui l'olomorfia di  $f$ . □