Metodi Matematici per l'Ingegneria

Angelo Alvino

A.A.2016-17

Indice

Capitolo 1

Funzioni olomorfe

1.1 La funzione exp in campo complesso

Indichiamo con $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi. Un numero complesso viene solitamente rappresentato in forma algebrica nel modo seguente

$$z = x + i\,y = \Re(z) + i\,\Im(z)\,.$$

Daremo per note le principali proprietà di $\mathbb{C}$; limitiamoci qui a ricordare che per "modulo" di z si intende la quantità

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e che valgono le seguenti disuguaglianze triangolari

$$(1.1) \qquad |z + z'| \leq |z| + |z'|\,, \qquad |\,|z| - |z'|\,| \leq |z - z^1 prime|\,.$$

Definizione 1.1.1. - *Si dice che una successione $\{z_n\}$ di numeri complessi converge a z, in simboli*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,,$$

se

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0\,.$$

Si puó facilmente verificare che la successione di termine generale

$$z_n = x_n + i\,y_n$$

converge a $z = x + i\,y$ se e solo se la successione $\{(x_n, y_n)\}$ converge in $\mathbb{R}^2$ a (x, y). Ció equivale a dire che $\mathbb{C}$ puó essere identificato dal punto di vista topologico con $\mathbb{R}^2$.
Consideriamo la serie di potenze

$$(1.2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Si puó dimostrare che la successione delle somme parziali della (1.2) converge per ogni z. Poiché la sua somma è $\exp x$ se $x \in \mathbb{R}$ è allora ragionevole porre

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.3}$$

Dimostriamo la seguente proprietà

$$e^{z+w} = e^z e^w \tag{1.4}$$

ben nota in campo reale. A tal fine richiamiamo il seguente risultato relativo alle successioni medie aritmetiche.

Proposizione 1.1.1. - *Sia $\{a_n\}$ una successione e a il suo limite; allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a\,.$$

Come conseguenza della prop. 1.1.1 si ha il seguente risultato.

Proposizione 1.1.2. - *Siano a, b i limiti delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$; si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = a\,b\,. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\, b + \frac{a_1(b_n - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n}\,. \tag{1.6}$$

Per la prop. 1.1.1 il primo termine a secondo membro nella (1.6) ha per limite $a\,b$. Per la proprietà triangolare (1.1) risulta inoltre

$$\left| \frac{a_n(b_1 - b) + \cdots + a_1(b_n - b)}{n} \right| \le \left(\sup_n |a_n| \right) \frac{|b_1 - b| + \cdots + |b_n - b|}{n}\,.$$

Sempre per la prop. 1.1.1 l'ultimo termine in (1.6) è infinitesimo. Si è ottenuto in tal modo la (1.5). □

Definizione 1.1.2. - *Per serie prodotto secondo Cauchy di due serie di termini generali a_k e b_k si intende la serie il cui termine n-mo è*

$$c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\,. \tag{1.7}$$

Proposizione 1.1.3. - *Se le serie di termini generali a_k e b_k sono assolutamente convergenti tale è anche la serie prodotto secondo Cauchy e si ha*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)\,. \tag{1.8}$$

Dimostrazione. L'assoluta convergenza della serie prodotto secondo Cauchy discende dalla disuguaglianza di semplice verifica

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right).$$

Siano A_n, B_n, C_n e A, B, C le somme parziali e le somme delle serie di termini generali a_k, b_k, c_k. Essendo

$$C_n = a_1 B_n + \cdots + a_n B_1$$

risulta

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \frac{A_n B_1 + \cdots + A_1 B_n}{n}.$$

Basta allora utilizzare le prop. 1.1.1 e 1.1.2 per ottenere la (1.8). □

Osservazione 1.1.1. - *La* (1.8) *sussiste anche se si assume che una sola delle due serie sia assolutamente convergente. Il risultato non vale se entrambe le serie sono solo convergenti. A tale proposito basta considerare il caso*

$$a_k = b_k = (-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Procediamo ora alla verifica della (1.4). Si ha

$$\begin{aligned} e^z\, e^w &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) \\ &\quad \text{(per la (1.8))} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\ &\quad \text{(per la formula del binomio di Newton)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

La serie (1.3) è assolutamente convergente; quindi è possibile riordinare i suoi termini senza alterarne la somma. Si ottiene pertanto la seguente relazione

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

da cui, per la (1.4),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)\,.$$

Si ottengono in tal modo le note formule di Eulero

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\,, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \tag{1.9}$$

che suggeriscono le seguenti estensioni a $\mathbb{C}$ delle funzioni trigonometriche seno e coseno

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.10}$$

ovvero

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,.$$

1.2 Derivabilità in campo complesso

Se $z = x + iy$ sia

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) \tag{1.11}$$

una funzione definita in un aperto A del piano complesso.
Si puó introdurre in modo del tutto naturale la nozione di convergenza e di continuità. Occupiamoci di estendere quella di derivata.

Definizione 1.2.1. - *Si dice che f è derivabile in z se il rapporto incrementale*

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

è convergente, al tendere di Δz a zero, ad un complesso che prende il nome di derivata di f in z e si denota con uno dei simboli

$$f'(z)\,, \quad \frac{df}{dz}(z)\,.$$

Se f è derivabile in ogni punto di A si dice che f è "olomorfa" in A.

È appena il caso di osservare che continuano a sussistere le regole di derivazione valide per la derivata in campo reale relative alla derivata della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni, alla derivata di una funzione composta e a quella dell'inversa.

Teorema 1.2.1. - *Se f è olomorfa in A allora u e v sono differenziabili. Valgono inoltre le seguenti identità* (*equazioni di Cauchy-Riemann*)

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x\,. \tag{1.12}$$

Dimostrazione. Si incrementi o solo la parte reale o solo la parte immaginaria di z. Si ha allora

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{ik}$$

da cui

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.13}$$

ovvero

$$f' = u_x + i\,v_x = v_y - i\,u_y\,. \tag{1.14}$$

Abbiamo in tal modo ottenuto le (1.12).
Resta da verificare la differenziabilità di u, v ovvero dell'applicazione del piano in sé

$$F\,:\,(x,y) \longrightarrow (u(x,y), v(x,y))\,. \tag{1.15}$$

Ricordiamo che F è differenziabile se esiste un funzionale lineare J di $\mathbb{R}^2$ in sé tale che

$$\lim_{(h.k)\to(0,0)} \frac{\|F(x+h,y+k) - F(x,y) - J(h,k)\|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{1.16}$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$. È noto che J si rappresenta mediante la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Per le (1.12) si ha allora

$$\begin{aligned} J(h,k) &= \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (u_x h - v_x k, v_x h + u_x k) \\ &= (u_x + iv_x)(h+ik) \end{aligned}$$

da cui, per la (1.14), posto $\Delta z = h + ik$,

$$J(h,k) = f'(z)\Delta z\,.$$

Pertanto il numeratore in (1.16) diventa

$$|f(z+\Delta z) - f(z) - f'(z)\Delta z|\,.$$

La (1.16) discende dall'olomorfia di f. □

Osservazione 1.2.1. - *Dalle* (1.12) *si ha*

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ & \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'|^2 \,. \tag{1.17}$$

Il determinante a primo membro è lo jacobiano della trasformazione (1.15)*.*

Ulteriori semplici conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann (1.12) sono elencate nella seguente

Proposizione 1.2.1. - *Sia f olomorfa in un aperto A connesso.*

- *Se f' è identicamente nulla in A allora f è costante;*
- *se la parte reale o quella immaginaria di f è costante allora f è costante;*
- *se il modulo di f è costante allora anche f è costante.*

Esempio 1.2.1. - *La funzione*

$$z \longrightarrow \bar{z} = x - iy$$

non è olomorfa in quanto non risultano soddisfatte le (1.12)*.*
Piú in generale, se f è olomorfa tale non puó essere $\overline{f}$ a meno che f non sia costante.

Esempio 1.2.2. - *Poiché*

$$(z+\Delta z)^n - z^n = \Delta z[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}] \tag{1.18}$$

si ha

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n\, z^{n-1} \,.$$

Quindi, come nel caso reale, la derivata di z^n è nz^{n-1}.

In realtà le condizioni di Cauchy-Riemann caratterizzano le funzioni olomorfe. Sussiste infatti il seguente risultato.

Teorema 1.2.2. - *Se u, v sono differenziabili in A e se valgono le* (1.12) *allora la funzione $f = u + i\,v$ è olomorfa in A.*

Dimostrazione. Essendo u, v differenziabili si ha

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x,y) &= u_x(x,y)h + u_y(x,y)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \\ v(x+h, y+k) - v(x,y) &= v_x(x,y)h + v_y(x,y)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \,. \end{aligned}$$

Se $z = x + i\,y$ e $\Delta z = h + i\,k$ per le (1.12) risulta

$$f(z+\Delta z) - f(z) = [u_x(x,y) + i\,v_x(x,y)]\,\Delta z + o(|\Delta z|)$$

da cui l'olomorfia di f. $\square$