Fisica Matematica

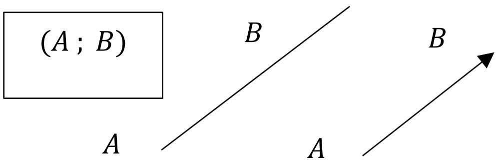
Appunti di Simone De Martino – Prof.essa De Angelis

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

INGEGNERIA CHIMICA

Vettori liberi

Definizione consideriamo una coppia ordinata (A ; B); si definisce segmento orientato un ente che ha una direzione, un verso ed un modulo. Più precisamente ha la direzione della retta congiungente i due punti, il verso che porta da A a B e come modulo la distanza tra A e B.



Definizione due segmenti orientati si dicono equipollenti quando hanno lo stesso modulo, stessa direzione, e stesso verso.

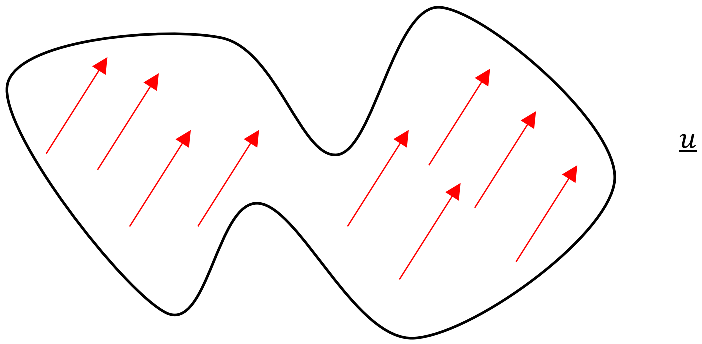
Proprietà

L'equipollenza e una relazione di equivalenza ovvero è riflessiva simmetrica e transitiva.

Definizione si definisce classe di equipollenza l'insieme di segmenti orientati equipollenti tra di loro. Le classi di equipollenza creano una partizione tra i segmenti orientati, ovvero un segmento orientato può appartenere ad una ed una sola classe di equipollenza.

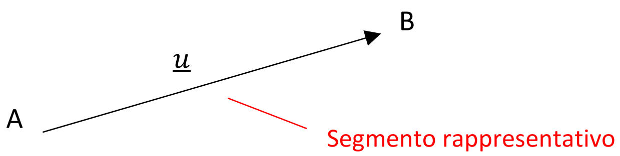
Definizione si intende per vettore libero la classe degli infiniti segmenti orientati equipollenti tra di loro.

NB: la risultante o reazione vincolare è un vettore liberi



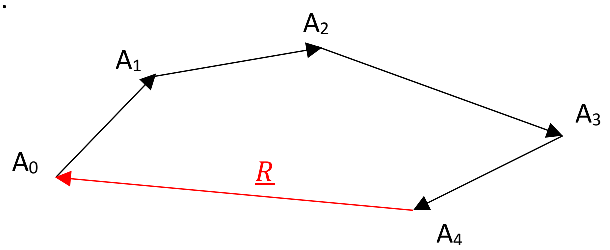
Per lavorare con i vettori liberi si sceglie un segmento rappresentativo della classe e si può usare la notazione di Grassmann. Infatti preso un segmento rappresentativo indichiamo con A il punto di applicazione nello spazio e a partire da tale punto riportiamo il segmento rappresentativo così che rimarrà univocamente determinato il punto B. La notazione di Grassmann permetterà di scrivere:

$$\underline{u} = B - A$$



Consideriamo la figura al lato formata da 4 vettori:

$R = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$
$R = (A_1 - A_0) + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + (A_4 - A_3)$
$R = A_4 - A_0$

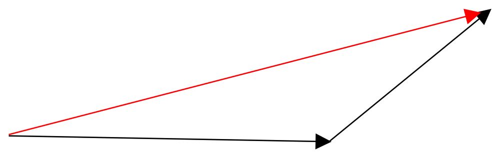


Consideriamo n vettori, $\underline{u_1}=A_1-A_0$, $\underline{u_2}=A_2-A_1$, $\underline{u_3}=A_3-A_2$,….,$\underline{u_n}=A_n-A_{n-1}$:

Definizione si definisce risultante il vettore libero individuato dal segmento orientato $\underline{R}=A_n-A_0$.

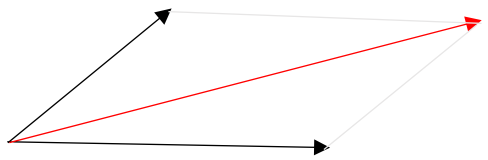
Consideriamo i casi in cui le tre libri siano n=2 e n=3:

- Caso n=2



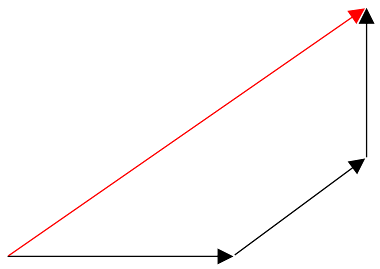
R = A2 – A0

Consideriamo i due vettori non più consecutivi, ma che hanno la stessa origine:



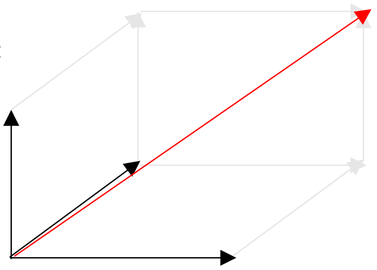
In tal caso la risultante è la somma di due vettori u_1 e u_2.

- Caso n=3



R = A3 – A0

Consideriamo nuovamente i vettori applicati in un unico punto O:



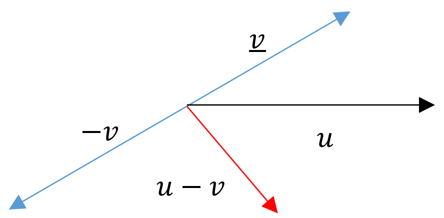
Nel caso di tre vettori, la risultante coincide con la diagonale del parallelepipedo che ha per lati i tre vettori assegnati.

Definizione considerazione:

Definizione consideriamo un vettore libero u e uno scalare n; si definisce prodotto scalare il vettore libero che ha come direzione u, come modulo il prodotto tra il modulo di u e il valore assoluto di n, e come verso, il verso concorde o discorde a seconda se n sia positivo o negativo.

Definizione considerati due vettori liberi u e v, la differenza vettoriale viene definita come la somma tra u e l'opposto di v.

u – v = u + (- v)

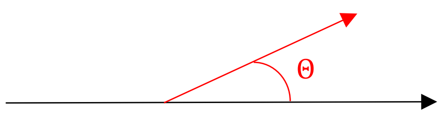


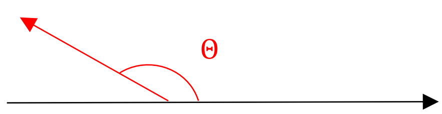
(Quindi la differenza coincide con la diagonale del parallelogramma diretto dall'estremo di v all'estremo di u)

NB: l'insieme di vettori liberi costituisce uno spazio vettoriale quindi delle otto proprietà caratteristiche.

Angolo fra due vettori e prodotto scalare tra vettori

Definizione consideriamo due vettori liberi u e v uscenti da uno stesso punto O; si definisce angolo tra i due vettori la regione di piano compresa tra di essi e tale che sia minore di π.





Definizione definiamo prodotto scalare tra vettori, lo scalare coincidente con il prodotto dei moduli e il coseno dell'angolo compreso tra i due.

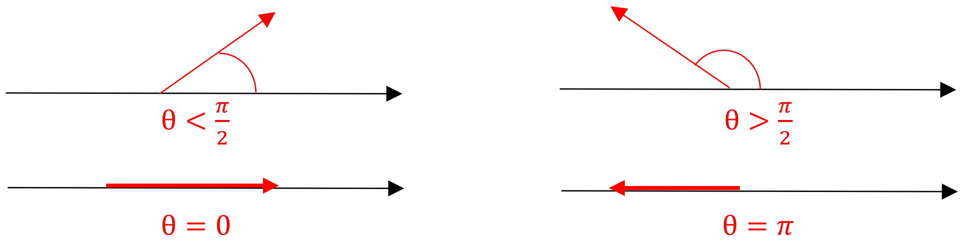
$$\underline{u}\ \ \underline{v} = \begin{cases} > 0 \text{ se } \theta < \pi/2 \\ = 0 \text{ se } \theta = \pi/2 \\ < 0 \text{ se } \theta > \pi/2 \end{cases}$$

Proprietà

1) $\underline{u}\ \ \underline{v} = \underline{v}\ \ \underline{u}$
2) $m\,\underline{u}\ \ \underline{v} = \underline{u}\ \ m\,\underline{v}$
3) $\underline{u}\ \ \underline{u} > 0 \quad \underline{u} = 0$
4) $\underline{u}\ \ \underline{v} > 0 \Leftrightarrow \underline{u} = 0$
5) $(\underline{u} \pm \underline{v})^2 = \underline{u}^2 + \underline{v}^{2\cdot} \pm 2\,\underline{v}\,\underline{u}$

Introduciamo ora la componente di un vettore lungo una direzione assegnata.

Consideriamo un vettore libero $\underline{u}$ ed una retta r il cui versore chiamiamo $\underline{e}$.



Definizione definiamo componente di un vettore libero $\underline{u}$ lungo r, $\underline{u}_r$, lo scalare $|OP^*|$:

$$\underline{u}_r \begin{cases} |OP^*| & \text{se } \theta < \pi/2 \\ -|OP^*| & \text{se } \theta > \pi/2 \end{cases}$$

Proprietà la componente vettoriale scalare $\underline{u}_r$ è data da $\underline{u}\ \ \underline{e}$:

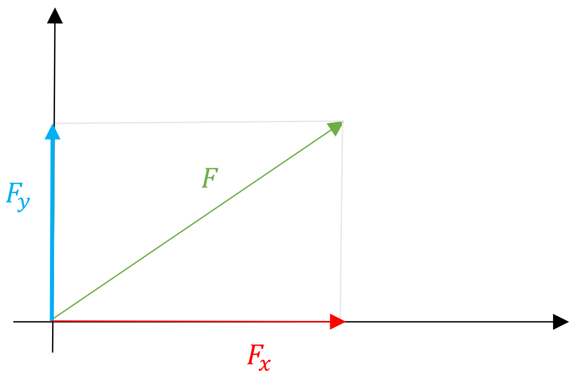
$\underline{u}_r = \underline{u}\ \ \underline{e}$: - se $\theta < \pi/2$

$\underline{u}_r = |OP^*| = |\underline{u}| \cos\theta = |\underline{u}|\,|\underline{e}| \cos\theta = \underline{u}\ \ \underline{e}$

- se $\theta > \pi/2$

$\underline{u}_r = -|OP^*| = -|\underline{u}| \cos(\pi - \theta) = -|\underline{u}|(-\cos\theta) = |\underline{u}| \cos\theta$

Supponiamo di avere una forza $\underline{F}$ e consideriamo un piano cartesiano tale che la sua origine coincide con l'estremo di $\underline{F}$.



Una volta scomposto il vettore $\underline{F}$ nelle proprie componenti F_x e F_y lungo rispettivamente i versori $\underline{i}$ e $\underline{j}$ è possibile dimostrare che il vettore $\underline{F}$ risulta univocamente determinato dalla seguente espressione:

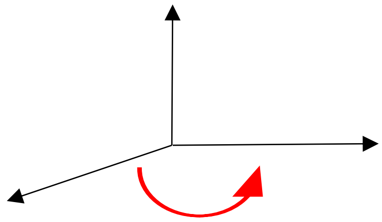
$$F = Fx\,\hat{\imath} + Fy\,\hat{\jmath}$$

Dalla formula di sopra si comprende che il vettore $\underline{F}$ è il risultante della somma di due vettori. Pertanto nella ricerca delle componenti, si possono usare le regole della somma o differenza tra due vettori.

Terne levogire e prodotto vettoriale

Consideriamo una terna ordinata di vettori liberi e non complanari ($\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$)

Definizione la terna ($\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$) si dirà terna levogira se ad un osservatore posto con i piedi in O e la testa rivolta verso il verso positivo di $\underline{w}$, appare antioraria la rotazione che il vettore $\underline{u}$ deve compiere per sovrapporsi al vettore $\underline{v}$ formando un angolo minore di π.



Definizione consideriamo due vettori liberi $\underline{u}$ e $\underline{v}$. Si definisce prodotto vettoriale un vettore che abbia come direzione la perpendicolare passante per il punto di origine di due vettori, come modulo:

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \operatorname{sen} \theta ,$$

e come verso:

($\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ x $\underline{w}$) ,ovvero è una terna levogira.

Introduciamo il prodotto misto ed il doppio prodotto vettoriale:

Consideriamo tre vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, possiamo avere:

$\underline{u}$ x $\underline{u}$ $\underline{w}$

$\underline{u}$ x $\underline{v}$ =

($\underline{u}$ x $\underline{v}$) x $\underline{w}$

Definizione considerati tre vettori liberi il prodotto misto tra tre vettori è uno scalare che in valore assoluto coincide con il volume del parallelepipedo di cui i tre vettori sono lati. Assume segno negativo o positivo a seconda che la terna sia destrogira o levogira, ed è nullo se sono complanari.

Vale la proprietà ciclica:

$$u\ x\ v\ w\ =\ u\ v\ x\ w\ =\ u\ x\ w\ v$$

Mentre per il doppio prodotto vettoriale vale la proprietà per cui:

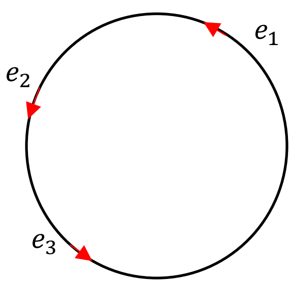
$$(u\ x\ v\ )\ x\ w\ =\ (u\quad w)\ v - (w\quad v)\ u$$

Basi ortonormali

Consideriamo un insieme di tre vettori $\underline{e_1}$ $\underline{e_2}$ ed $\underline{e_3}$; B = {$\underline{e_1}$; $\underline{e_2}$; $\underline{e_3}$} è una base per lo spazio tridimensionale, cioè si può esprimere come combinazione lineare delle componenti.
Definizione la base B si dirà base ortonormale se gli elementi che la compongono sono a due a due ortogonali tra di loro e hanno un modulo unitario.

Definizione una terna si dirà cartesiana se ad essa è associata una base ortonormale. Le componenti dei vettori in tale terna vengono dette componenti cartesiane. Tale terra sarà levogira se i tre vettori formano una terna levogira.

$$e_1\ x\ e_2\ =\ e_3$$
$$e_3\ x\ e_1\ =\ e_2$$
$$e_2\ x\ e_3\ =\ e_1$$



Scriviamo le varie operazioni in componenti cartesiane:

Consideriamo i tre vettori:

$$\begin{cases} u = (u_x , u_y , u_z) \\ v = (v_x , v_y , v_z) \\ w = (w_x , w_y , w_z) \end{cases}$$

Abbiamo che:

1) Prodotto scalare $\quad u \;\; v = u_x \, v_x + u_y \;\, v_y + u_z \;\, v_z$

2) Prodotto vettoriale

$$u \, x \, v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

3) Prodotto misto

$$u \, x \, v \;\; w = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Risoluzione di una equazione vettoriale

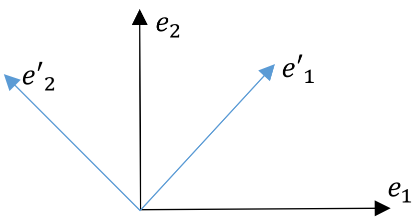
Assegniamo due vettori <u>a</u> e <u>b</u> e mettiamoci nelle ipotesi che valga <u>a</u> <u>b</u> = 0 (condizione di compatibilità) in questo caso è possibile dimostrare che l'equazione vettoriale <u>y</u> x <u>a</u> = <u>b</u>, nell'incognita <u>y</u>, ammette soluzioni e tali soluzioni sono date dalla formula:

(Senza dimostrazione)

$$y = \frac{1}{a^2}(a \, x \, b) + \mu \, a \qquad \text{con } \mu \in R$$

Cambiamento di base

Consideriamo due basi ortonormali B e B'



$B = \{e_1 ; e_2\}, oppure, B = \{e_i\}_{i=1,2}$

$B' = \{e'_1 ; e'_2\}, oppure, B = \{e'_i\}_{i=1,2}$

Consideriamo l'angolo θ:

$$e'_1 = (cos\theta)e_1 + (sen\theta)e_2$$

$$e'_2 = (-sen\theta)e_1 + (cos\theta)e_2$$

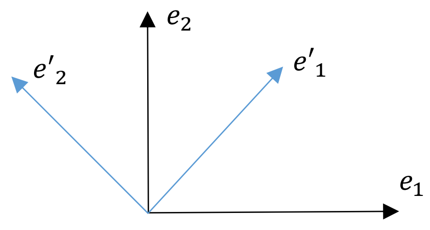
Possiamo produrre la matrice A detta matrice del cambio di base:

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

La formula sotto riportata rappresenta la legge di trasformazione delle basi ed è una legge omogenea, lineare, retta dalla matrice A che detta matrice di trasformazione.

Portiamoci ora a lavorare con l'operazione inversa:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{2} A_j^i e_i \quad con \; j = 1,2 \qquad se \; j = 2 \quad e'_2 = \sum_{i=1}^{2} A_2^i \, e^i \;\rightarrow\; e'_2 = A_2^1 e_1 + A_2^2 e_2$$



$$\begin{cases} e_1 = (cos\theta)e'_1 + (-sen\theta)e'_2 \\ e_2 = (sen\theta)e'_1 + (cos\theta)e'_2 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & -\,sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = A^T}$$

Proprietà di ortonormalità

La matrice della legge di trasformazione delle basi è una matrice la cui inversa coincide con la trasposta. Pertanto essa risulta una matrice ortonormale, ovvero soddisfa due condizioni

i) la somma dei quadrati degli elementi di ciascuna riga è uguale a uno;

ii) la somma dei prodotti tra gli elementi omologhi di due righe è uguale a zero.

Consideriamo due basi formati da tre elementi

$$B = \{e_1; e_2; e_3\} \ oppure \ \ B = \{e_i\}_{i=1,2,3}$$
$$B' = \{e'_1; e'_2; e'_3\} \ oppure \ \ B = \{e_j\}_{j=1,2,3}$$

Introduciamo la matrice A, matrice ortonormale:

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix}$$

È possibile dimostrare che vale la legge di trasformazione delle basi: $e'_j = \sum_{i=1}^{3} A^i_j e_i$

La matrice A deve soddisfare le proprietà di ortonormalità:

$$\begin{cases} (A^1_1)^2 + (A^2_1)^2 + (A^3_1)^2 = 1 \\ (A^1_2)^2 + (A^2_2)^2 + (A^3_2)^2 = 1 \\ (A^1_3)^2 + (A^2_3)^2 + (A^3_2)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^1_1 A^1_2 + A^2_1 A^2_2 + A^3_1 A^3_2 = 0 \\ A^1_1 A^1_3 + A^2_1 A^2_3 + A^3_1 A^3_3 = 0 \\ A^1_2 A^1_3 + A^2_2 A^2_3 + A^3_2 A^3_3 = 0 \end{cases}$$

NB: si dice prima l'indice di riga (↓ quello sotto), e poi l'indice di colonna (↑ quello sopra).

Proprietà la matrice A la legge di trasformazione delle basi, essendo una matrice ortonormale deve soddisfare le 6 condizioni di ortonormalità, pertanto dei 9 elementi che la compongono, solo 3 sono "liberi" di assumere qualunque valore.

Convenzione di Einstein sull'indice ripetuto

Quando in un' espressione ritroviamo un indice ripetuto in basso ed in alto, su quell'indice si deve supporre di eseguire la sommatoria. L'indice ripetuto è detto indice muto (perché può essere cambiato senza alterare il senso della formula) e l'indice che non si ripete è detto indice ricorrente.

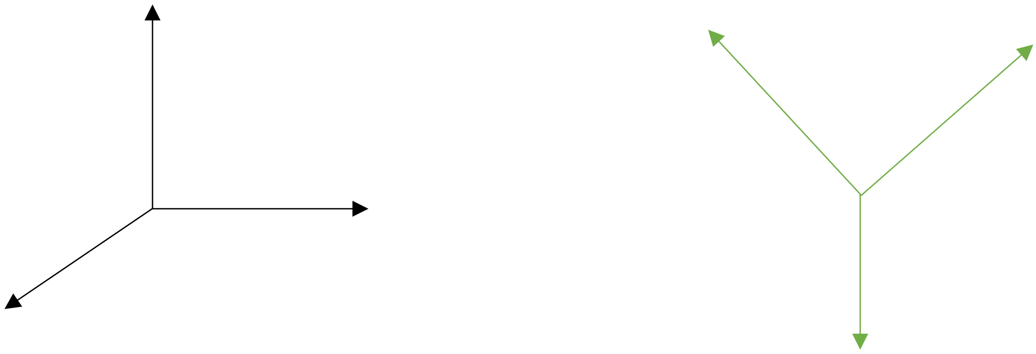
$$e'_j = A^i_j e_i$$

Indice muto

$$e'_j = A^h_j e_h$$

Legge di variazione delle componenti al variare del riferimento

Consideriamo due riferimenti:



Assegniamo al vettore $\underline{x}$ uguale $P - O$ delle componenti:

$$x = x^1\, e_1 + x^2\, e_2 + x^3\, e_3 = x^i e_i$$

Per $\underline{y}$ uguale $P - O'$:

$$y = y^1\, e'_1 + y^2 e'_2 + y^3\, e'_3 = y^j e'_j$$

Per $x'_O = O' - O$:

$$x_{O'} = x^1_{O'}\, e_1 + x^2_{O'}\, e_2 + \, x^3_{O'}\, e_3 = x^i_{O'}\, e_i$$

Quindi:

Unico espresso nella base B'

$$x = x_{O'} + y \rightarrow x^i e_i = x^i_{O'}\, e_i + y^j e'_j$$

Ricordando quindi che per la legge di variazione delle basi vale che: $e'_j = A^i_j e_j$
Da cui la legge di variazione delle componenti al variare di riferimento diviene:

$$x^i e_i = x^i_{O'}\, e_i + A^i_j\, y^j e_j \rightarrow \left(x^i - x^i_{O'} - A^i_j\, y^j e_j\right) = 0 \qquad \forall i = 1,2,3\ e\ \forall j = 1,2,3$$

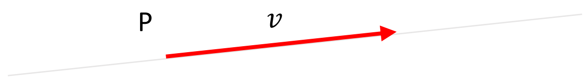
Questa è detta legge di variazione delle componenti dei vettori posizione rispetto al suo osservatore. In maniera più esplicita, volendo introdurre la variabile temporale, scriveremo:

Domande Frequenti

1) prodotto scalare e prodotto vettoriale;
2) prodotto misto e doppio prodotto vettoriale;
3) rappresentazione cartesiana delle equazioni;
4) proprietà
5) legge di variazione delle Basi e delle componenti al variare del riferimento.

Vettori applicati 1

Definizione l'ente analitico individuato da un punto nello spazio e da un vettore libero viene detto vettore applicato (P ; v).



Definizione la retta sulla quale giace il vettore v è detta retta di applicazione

Momento polare di un vettore applicato

Consideriamo il vettore applicato (P ; v) e un punto T chiamato polo.

Definizione si definisce momento polare del vettore applicato (P ; v) rispetto al polo T, il vettore libero:

$$M_T = v\ x\ (T - P)$$

Il momento polare è un vettore ortogonale al piano individuato dal vettore v e dal vettore (T – P), il cui modulo è:

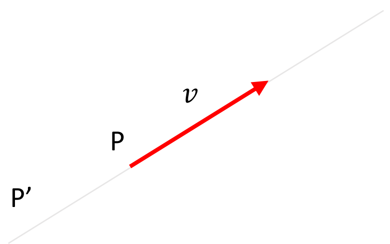
$$|M_T| = |v||T - P|sen\theta$$

(L'inverso è tale che la terna (v ; (T – P) ; M_t) sia una terna levogira).

(Al momento polare deve apparire levogiro il vettore v, ovvero il vettore v deve ruotare nel senso antiorario attorno all'asse M_t).

Proprietà

Il momento polare di un vettore applicato non varia al cambiare del punto di applicazione lungo la retta di applicazione del vettore applicato.



$$M_T = v\ x(T - P)$$

Consideriamo P' → $M_T = v\ x\ [(T - P') + (P' - P)]$

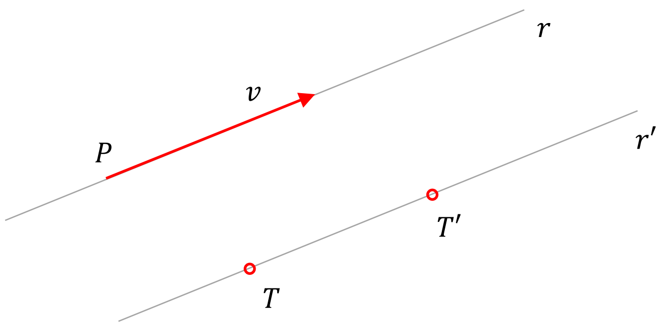
$$v\ x\ (T - P') + \cancel{v\ x\ (P' - P)}$$

Poiché v è // a $(P' - P)$

E quindi otteniamo che: $M_T = v\ x\ (T - P')$

Proprietà

Il momento polare non varia al variare del polo T lungo una retta parallela alla retta di applicazione del vettore.



$$M_T = v\ x\ (T - P)$$
$$M_{T'} = v\ x\ (T' - P)$$
$$M_T - M_{T'} = v\ x\ (T - \cancel{P} - T' + \cancel{P}) = v\ x\ (T - T')$$

In particolare abbiamo che v // $(T - T')$ → il prodotto vettoriale è uguale a 0 e in conclusionme ricaviamo che $T = T'$

I sistemi di vettori applicati vengono definiti da una risultante e dal suo momento.

Consideriamo un sistema discreto di n vettori applicati:

$$\Sigma_n = sistema\ di\ vettori = \{(P_1; v_1):(P_2; v_2); \dots; (P_n; v_n)\}$$
$$\Sigma_n = \{(P_k; v_k)\}_n$$

Fissiamo un polo T arbitrario ed andiamo ad introdurre il momento risultante polare M_T.

Il momento risultante polare coincide con la somma dei momenti polari dei vettori costituenti il sistema discreto di vettori applicati (Σ_n).

$$M_T = \sum_{k=1}^{n} v_k\ x\ (T - P_k)$$

NB: il risultante è un vettore libero.

$$R = risultante = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Introduciamo quindi il campo di vettori applicati:

Consideriamo un insieme misurabile A e riteniamo che in ogni punto dell'insieme sia applicato un vettore. il risultante è un integrale del tipo:

$$R = \int_A v(P)dA \qquad con\ P \in A$$

Da cui il momento risultante polare rispetto a T diviene:

$$M_T = \int_A v(P)\ x\ (T - P)\ dA$$

Teorema del Varignon

Consideriamo un sistema di vettori applicati tutti in uno stesso punto di applicazione:

$$\Sigma_n = \{(P; v_1):(P; v_2); \dots; (P; v_n)\}$$

Andiamo a vedere quanto vale M_T:

$$M_T = \sum_{k=1}^{n} v_k\ x\ (T - P_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k\ x\ (T - P) = R\ x\ (T - P)$$

E ricordando che: $R = \sum_{k=1}^{n} v_k$ otteniamo che Il momento risultante di un sistema di vettori applicati tutti in uno stesso punto coincide con il momento del solo risultante ritenuto applicato nel punto di applicazione dei vettori stessi.

Legge di variazione del momento al variare del polo

Fissiamo due poli arbitrari: T ed S ed andiamo a valutare M_T ed M_S cercando una relazione tra i due:

$$M_T = \sum_{k=1}^{n} v_k\ x\ (T - P_k)$$
$$M_S = \sum_{k=1}^{n} v_k\ x\ (S - P_k)$$

Andiamo a calcolare la differenza $M_T - M_S$:$M_T - M_S = \sum v_k\ x\ (T - \cancel{P_k} - S + \cancel{P_k}) \rightarrow = \sum v_k\ x\ (T - S)$

In particolare la sommatoria riguarda solo i v_k, quindi:$M_T - M_S = R\ x\ (T - S)$

Abbiamo quindi trovato che: $\forall T, S\ poli, M_T = M_S + R\ x\ (T - S)$