SUCCESSIONI DI FUNZIONI

DATO $X \subseteq \mathbb{R}$

PER UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI

$$f_n(x) : \begin{matrix} x \in X \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ESISTONO DUE DISTINTE NOZIONI DI CONVERGENZA:

- CONVERGENZA PUNTUALE

DEF $\quad X \subseteq \mathbb{R}, \quad f_n(x) : x \in X \to \mathbb{R}$

$$f(x) : x \in X \to \mathbb{R}$$

$f_n(x) \to f(x)$ PUNTUALMENTE IN $X \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

IN QUESTO CASO L'INDICE ν DIPENDE SIA DA ε CHE DA x

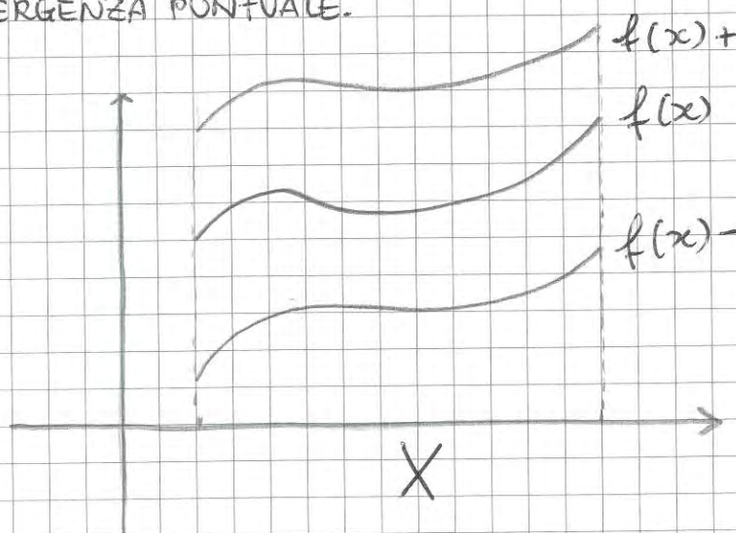
- CONVERGENZA UNIFORME

DEF $\quad f_n(x) \to f(x)$ UNIF. IN $X \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \begin{matrix} \forall n > \nu \\ \forall x \in X \end{matrix}$$

IN QUESTO CASO L'INDICE ν DIPENDE SOLO DA ε

LA CONVERGENZA UNIFORME E' DUNQUE UNA CONDIZIONE PIÙ FORTE DELLA CONVERGENZA PUNTUALE.



appuntofficinastudenti

CARATTERIZZAZIONE DELLA CONVERGENZA UNIFORME

$$f_n(x) \underset{\text{unif. in } X}{\longrightarrow} f(x) \iff \lim_n \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

DIM.

HP: $\lim_n \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$ $\Rightarrow$ TH: $f_n(x) \underset{\text{UNIF. IN } X}{\longrightarrow} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

ESSENDO IL SUP $< \varepsilon$ ALLORA ANCHE

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$$

DIM.

HP: $f_n(x) \underset{\text{UNIF. IN } X}{\longrightarrow} f(x)$ $\Rightarrow$ TH: $\lim_n \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

AL PIÙ IL SUP SARA' $\leq \varepsilon$

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

appunti ufficiali studenti

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO $f_n(x) = nx e^{-n^2x^2}$ CON $X = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = nx e^{-n^2x^2}$$

FISSATO $x \neq 0$ $f_n(x) \xrightarrow[\text{punt. in } \mathbb{R}]{} 0$: $\lim_n \frac{nx}{e^{n^2x^2}} = 0$

IL LIMITE PUNTUALE E' ZERO, SE ESISTE IL LIMITE UNIFORME IL CANDIDATO E' PROPRIO LUI.

PER LA CARATTERIZZAZIONE DELLA CONVERGENZA UNIFORME VALUTO IL SUP:

$$\sup_{\mathbb{R}} |nx e^{-n^2x^2} - 0| =$$

$$= \sup_{\mathbb{R}} |nx e^{-n^2x^2}| = \sup_{[0,+\infty)} nx e^{-n^2x^2}$$ ESSENDO $f_n(x)$ PARI

$\lim_{x \to 0} nx e^{-n^2x^2} = 0$

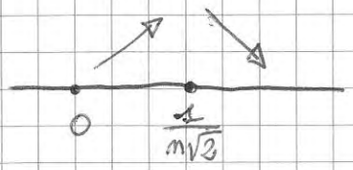
$\lim_{x \to +\infty} nx e^{-n^2x^2} = 0$ DUNQUE f_n E' LIMITATA SUPERIORMENTE

$$f_n'(x) = n e^{-n^2x^2} + nx e^{-n^2x^2} \cdot (-2n^2x)$$

$$f_n'(x) = e^{-n^2x^2}(n - 2n^3x^2) = n e^{-n^2x^2} \cdot (1 - 2n^2x^2)$$

DUNQUE f_n' E' POSITIVA $\forall x \in \left(-\frac{1}{n\sqrt{2}}, \frac{1}{n\sqrt{2}}\right)$

DATO CHE LA STIAMO STUDIANDO SOLO IN $[0, +\infty)$:



PERTANTO IL SUP DI f_n, NON CHE' MASSIMO, SI TROVA IN

$$f\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-n^2 \frac{1}{n^2 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

QUINDI NON TENDENDO A ZERO, IN $\mathbb{R}$ $f_n(x)$ NON CONVERGE UNIF.

CI ACCORGIAMO CHE f_n IL "PROBLEMA" CE L'HA IN $1/2n$, PONIAMOCI ANZICCHE' IN $\mathbb{R}$ IN UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$:

$$]-\infty, a[\cup]a, +\infty[\text{ CON } a \text{ fissato}$$
$$a \in \mathbb{R}$$

appuntofficinastudenti

COME GIÀ OSSERVATO $f_n(x)$ CONVERGE IN $\mathbb{R}$ PUNTUALMENTE A $f(x)=0$.

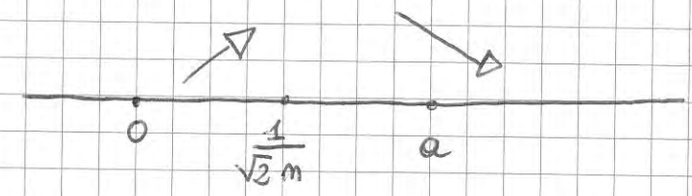
CALCOLIAMO IL SUP NEL NUOVO INTERVALLO (ESSENDO PARI VALUT. SOLO LA PARTE POSITIVA) $I:]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$

$$\sup_{x\in]a,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in]a,+\infty[} |nxe^{-nx^2}| =$$

$$= \sup_{x\in(a,+\infty)} nxe^{-n^2x^2}$$

$$f_n'(x) = ne^{-n^2x^2}\cdot(1-2n^2x^2)$$

$f_n' \geq 0 \quad \forall x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}n}\right] \qquad f_n' < 0 \quad \forall x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}n},+\infty\right)$



ESSENDO f_n DECRESCENTE IN $\left(\frac{1}{\sqrt{2}n},+\infty\right)$ LO È IN $[a,+\infty)$

IL SUP IN $(a,+\infty)$ È DUNQUE $f_n(a)$

$$f_n(a) = nae^{-n^2a^2}$$

$$\lim_n nae^{-n^2a^2} = 0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[\text{UNIFORM. IN }]{} 0$$

$]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$

appunti universitari studenti

TEOREMA DI CONTINUITA' DEL LIMITE

HP: $f_n(x) \in C^0([a,b]) \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$ UNIF. IN $[a,b]$ $\quad \Rightarrow$ TH: $f(x) \in C^0([a,b])$

DIM.

PER DIMOSTRARE CHE $f(x)$ SIA CONTINUA MI BASTA DIMOSTRARE CHE $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ PER OGNI x_0 FISSATO, $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \varepsilon_{(A)} + \varepsilon_{(B)} + \varepsilon_{(C)} \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

(A) $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ PER L'IPOTESI DI CONV. UNIFORME A $f(x)$

(C) $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

(B) $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ PER L'IPOTESI DI CONTINUITA' IN $[a,b]$ CHE PERMETTE DI AVERE $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ CON $|x - x_0| < \delta\varepsilon$

ES.

CONSIDERIAMO LA $f_n(x) = x^n$ CON $X = [0,1]$ CONT. IN X

LA SUCC. DI F. NON CONVERGE UNIFORMEMENTE IN X MA SOLO PUNTUALMENTE

$$f_n(x) \xrightarrow[\text{punt in } X]{} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

OSSERVIAMO DUNQUE CHE $f(x)$ NON E' CONTINUA,

QUINDI IL TEOREMA NON SUSSISTE PER LA CONVERGENZA PUNTUALE

E' NECESSARIA QUELLA UNIFORME.

OSSERVIAMO CHE $f_n \xrightarrow[\text{UNIF IN } (0,1)]{} 0$ FISSIAMO $a < 1$ e $I = [0,a]$

$$\lim_n \sup_{x \in I} |f_n(x) - 0| = \lim_n \left(\lim_{x \to a} x^n \right) = \lim_n a^n = 0$$

appunti officinastudenti

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO AL SEGNO DI INTEGRALE

HP:
$$f_n(x) \in C^0([a,b]) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$f_n(x) \to f(x) \text{ UNIFORMEMENTE IN } [a,b]$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

TH:
$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_n f_n(x) = \int_a^b f(x)\,dx$$

DIM.

PER IL TEOREMA SULLA CONTINUITA' DEL LIMITE $f(x)$ E' CONTINUA QUINDI INTEGRABILE S.R. IN $[a,b]$

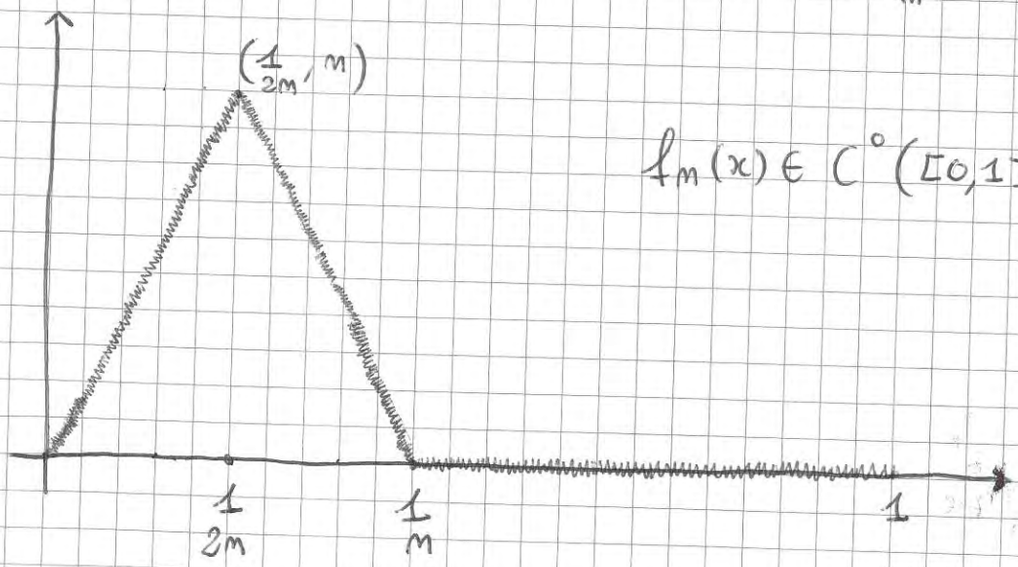
INOLTRE VALUTO CHE

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \le$$
$$\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$
$$\le \varepsilon (b-a)$$

CON $n > \nu_\varepsilon$
DOVE ν_ε E' DATO DALLA CONV. UNIF.

IN QUESTO TEOREMA L'IPOTESI DI CONVERGENZA UNIFORME NON PUO' ESSERE SOSTITUITA CON QUELLA DI CONVERGENZA PUNTUALE: ECCO UN ESEMPIO CHE LO DIMOSTRA

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right) \\ 0 \text{ se } x \in [\frac{1}{n}, 1] & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



$$f_n(x) \in C^0([0,1]) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

appunti ufficiostudenti

L'INTEGRALE TRA 0 e 1 DI $f_n(x)$ NON È ALTRO CHE L'AREA DI UN TRIANGOLO DI BASE $\frac{1}{n}$ E ALTEZZA n.

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n} = \frac{1}{2}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$

LA SUCCESSIONE $f_n(x) \xrightarrow[\text{pt. in } [0,1]}{} 0$

FISSATO $\tilde{x} \in [0,1]$ AD UN CERTO PUNTO $\frac{1}{n}$ È PIÙ PICCOLO DI $\tilde{x}$

$$\Rightarrow \lim_n f_n(\tilde{x}) = 0$$

DUNQUE L'INTEGRALE DEL LIMITE È ZERO.

- ABBIAMO VERIFICATO CHE IN QUESTO CASO IL SEGNO DI INTEGRALE E DI LIMITE NON POSSONO ESSERE INVERTITI;

CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE $g_n(x) = 2f_n(x)$: $\int_0^1 g_n(x)\,dx = 1$

CONSIDERIAMO $\varphi(x) \in C^0([0,1])$

DIMOSTRIAMO CHE $\int_0^1 g_n(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0)$:

ESSENDO $\varphi(x)$ CONTINUA CON $|x| < \delta\varepsilon$, $\varphi(0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(0) + \varepsilon$

ESSENDO $g_n(x)$ POSITIVA $g_n(x)\cdot(\varphi(0)-\varepsilon) < g_n(x)\varphi(x) < g_n(x)\cdot(\varphi(0)+\varepsilon)$

ESSENDO $g_n(x)$ e $\varphi(x)$ CONTINUE IN UN COMPATTO SONO RIEMANN-INTEGRABILI

$$\int_0^1 g_n(x)(\varphi_0-\varepsilon)\,dx \le \int_0^1 g_n(x)\varphi(x)\,dx \le \int_0^1 g_n(x)(\varphi_{(0)}+\varepsilon)\,dx$$

$$(\varphi(0)\mp\varepsilon)\int_0^1 g_n(x)\,dx \le \int_0^1 g_n(x)\varphi(x)\,dx \le (\varphi(0)+\varepsilon)\int_0^1 g_n(x)\,dx$$

DATO CHE $\int_0^1 g_n(x)\,dx = 1$

$$(\varphi(0)-\varepsilon) \le \int_0^1 g_n(x)\varphi(x)\,dx \le (\varphi(0)+\varepsilon)$$

appuntofficinastudenti

TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA

HP:

- $f_n(x) \in C^1([a,b])$
- $\exists x_0 \in [a,b] : f_n(x_0) \to \ell \in \mathbb{R}$
- $f_n'(x) \to g(x)$ UNIFORMEMENTE IN $[a,b]$

TH:

$f_n \to f(x)$ UNIF. IN $[a,b]$ E RISULTA $f'(x) = g(x)$

DIM.

PER IL T. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE CON $[x_0, x] \subseteq [a,b]$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$$

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \right]$$

PORTO IL LIMITE DENTRO IL SEGNO DI INTEGRALE;
RICORDO CHE $f_n(x_0) \to \ell \in \mathbb{R}$;

$$\lim_n f_n(x) = f(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$: C'È CONV. PUNTUALE

PER MOSTRARE CHE $f_n(x) \to f(x)$ UNIF. IN $[a,b]$ VALUTO LA QUANTITÀ:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \ell - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|$$

SE TROVO UN MAGGIORANTE CHE VA A ZERO DUNQUE ANCHE IL SUP VA A ZERO

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \ell - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|$$

$$\cancel{\leq \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \right| +}$$

$$\leq |f_n(x_0) - \ell| + \left| \int_{x_0}^{x} [f_n'(t) - g(t)]\,dt \right.$$

$$\leq \varepsilon + \left| \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\,dt \right|$$

METTO IL VAL. ASS. FUORI ALL'INTEGRALE PERCHÈ NON SO SE $x > x_0$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon |x - x_0|$$

AL PIÙ

$$\leq \varepsilon + \varepsilon (b-a)$$

appuntuofficinastudenti

OSSERVIAMO CON UN CONTROESEMPIO CHE IL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO NON È VALIDO AL RITORNO CIOÈ NELLE STESSE PRIME DUE IPOTESI

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ UNIF. IN } [a,b] \quad \not\Rightarrow \quad f_n'(x) \longrightarrow g(x) \text{ UNIF. IN } [a,b]$$

CONSIDERIAMO $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$;

$f_n(x) \longrightarrow |x|$ pt. in $\mathbb{R}$

oss. : $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

VERIFICHIAMO LA CONVERGENZA UNIFORME :

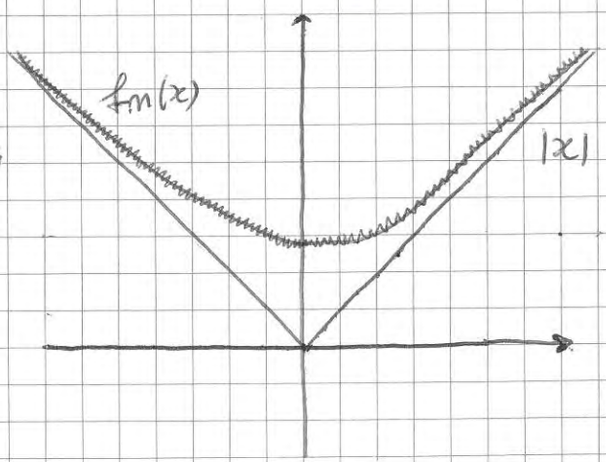
$$\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right| \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \leq$$

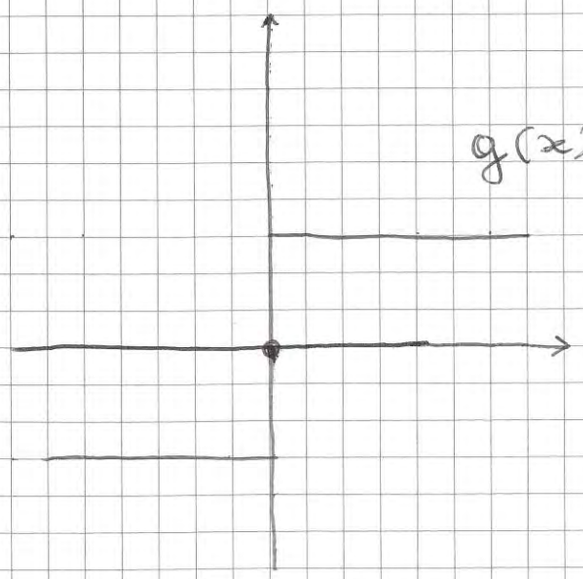
$\leq \sqrt{\frac{1}{n}}$ QUINDI $\sqrt{\frac{1}{n}}$ È MAGGIORANTE DI $|f_n(x) - f(x)|$

DATO CHE $\sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$, $f_n(x)$ CONV. UNIF. A $|x|$;

- STUDIO $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \longrightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

ESSENDO IL LIMITE PUNTUALE DI f_n' DISCONTINUO NON C'È CONV. UNIF.





appuntofficinastudenti

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ E STUDIAMONE LA CONV. PUNT. E UNIF.

$$\lim_n n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_n \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \cdot x = x \lim_n \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x$$

NEL CALCOLO DEL L'IMITE HO CALCOLATO IL LIMITE DI $f_n(x)$ CON $x \neq 0$
ALTRIMENTI IL SECONDO PASSAGGIO NON SAREBBE VALIDO, PER ORA QUINDI SO CHE $\forall x \neq 0 \quad f_n(x) \to x$
MA DATO CHE $f_n(0) = 0 \ \forall n$ ANCHE $\lim_n f_n(0) = 0$ E ANCHE $f(0) = 0$
QUINDI LA F. LIMITE E' CONTINUA

$f_n(x) \longrightarrow f(x) = x$ PUNT. IN $\mathbb{R}$

STUDIAMO LA CONV. UNIFORME:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \right| = +\infty$$

n è fissato, il seno è limitata fra $-n, n$

~~il sup~~ va a $-\infty$

IN $\mathbb{R}$ NON PUO' ESSERCI UNIFORME CONVERGENZA, CERCO DI CAPIRE QUALI ZONE DEVO RIMUOVERE PER FARLA CONVERGERE;

INTUISCO CHE IL PROBLEMA CE L'HO NEGLI INTORNI DI $\pm\infty$, LA STUDIO IN $[-A, A]$

$\forall A \in (0, +\infty)$

OSSERVO CHE $\forall t \geq 0, \sin(t) \leq t \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$

$$\Rightarrow n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \leq 0 \quad \forall x \in [0, A]$$

$$\sup_{[-A,A]} \left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \right| = \max_{[0,A]} \left| n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x \right| = \max_{[0,A]} \left(x - n \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right)$$

$$\frac{d\left(x - n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{dx} = 1 - \frac{n}{n} \cos\left(\frac{x}{n}\right) = 1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right) \geq 0$$

DEDUCO CHE $\left(x - n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ E' CRESCENTE QUINDI IL MAX E' NELL'ESTREMO DESTRO

$$\max_{[0,A]} \left(x - n \sin \frac{x}{n} \right) = A - n \sin \frac{A}{n} \longrightarrow (A - A) = 0$$

DUNQUE $f_n(x)$ CONV. UNIF. A x IN $[-A, A]$

appunti ufficiali studenti