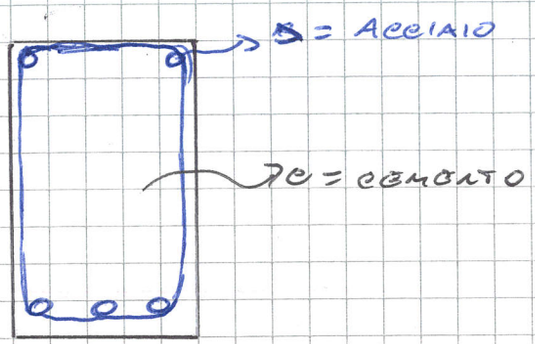
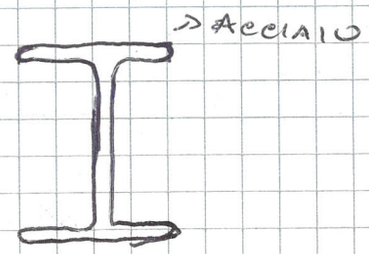
STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO

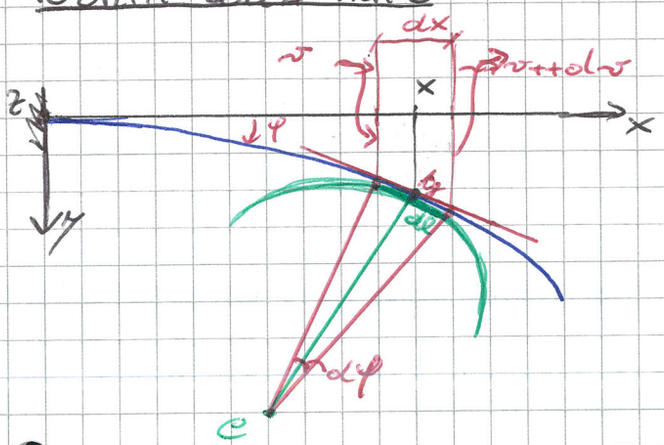
- CARATTERIZZATA DA UN'ARMATURA IN ACCIAIO SUL FONDO E NEGLI SPIGOLI IN ALTO CHE ESCONO DAL PIANO, INOLTRE CI SONO ANCHE LE STAFFE NEL PIANO





TECNICA: TEORIA TECNICA APPROSSIMATA CHE CI CONSENTE DI RISOLVERE AGILMENTE I QUESITI.

TEORIA DELLA TRAVE



NON CI SARANNO SPOST. V

- CERCHIO CHE SI CONFONDE CON LA CURVA

DEFORMATA => CURVATURA

- SPOST $\Rightarrow v(x)$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dv}{dx} = v'$$

- IN TECNICA CI BASTA C'Hp DI PICCOLE ROTAZIONI $\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi \simeq \varphi = v'$
- CURVATURA $= \frac{1}{R}$ $[L^{-1}]$
- INTERVALLO INTORNO A X (dx)
- LUNGHEZZA DI QUELL'ARCHETTO (dl) CHE IN Hp DI PICCOLI SPOSTAMENTI SI È PARI A $dx \Rightarrow dl \simeq dx$

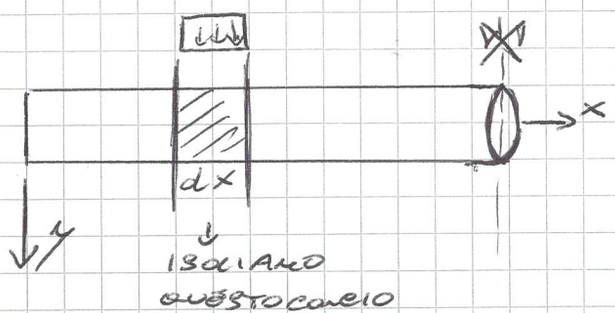
$$dl \simeq \sqrt{(dx)^2 + (dv)^2} \simeq dx\sqrt{1+(v')^2} \simeq dx \qquad [\cdot\ v' \ll 1]$$

- LA PROIEZIONE ORIZZONTALE DI dl È $\simeq dx$ IN Hp DI PICCOLI SPOST (ORIZZ.)

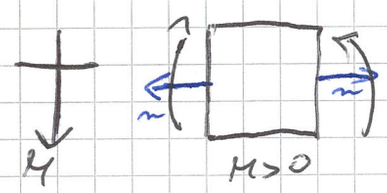
$d\varphi \cdot R = dl = dx \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dx}$ => CURVATURA DI UNA SEZIONE $\frac{d\varphi}{dx} = v''$

CINEMATICA DI UNA SEZIONE

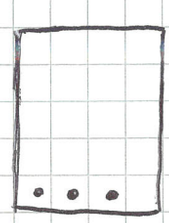
- 3 POST => v
- ROTAZ. => $\varphi = v'$
- CURVATURA => $\frac{1}{R} = -v''$



- IL DIAGR. DEL MOMENTO LO SI RIPORTA DAL LATO DELLE FIBRE TESE

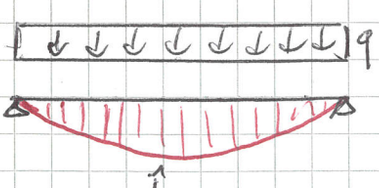


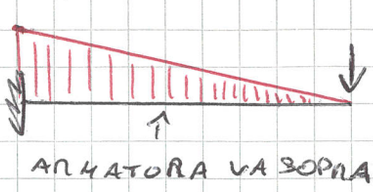
- L'ARMATURA PRINCIPALE SI METTE DAL LATO DELLE FIBRE TESE

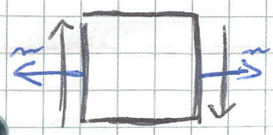


-> SEZ. SOGGETTA A $M>0$

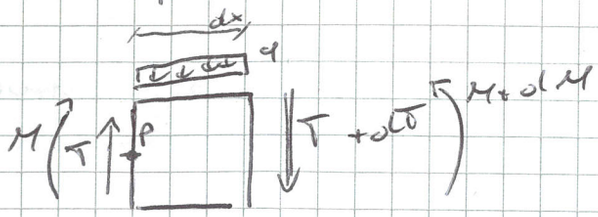
- L'ARMATURA SI METTE PER ASSORBIRE LA TRAZIONE, POICHÉ RESISTE BENE SIA A TRAZIONE CHE A COMPRESSIONE MENTRE QUANTO IL CALCESTRUZZO NON RESISTE A TRAZIONE







$T > 0$



• DISEGNO I CARICHI SONO VERSO IL BASSO PERCHÉ SONO GRAVITAZIONALI

EQ. TRASL. VERTICALE

$$q\,dx + dT = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dx} = -q} \Rightarrow \boxed{q = -\frac{dT}{dx}}$$

STATICA

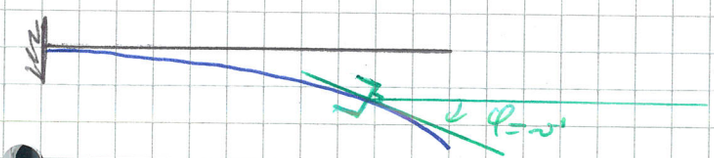
EQ. ROT. INTORNO A P

$$M - M - dM + q\frac{(dx)^2}{2} + T\,dx + dT\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dM}{dx} = T}$$

M: CONV. ORARIO POSITIVO

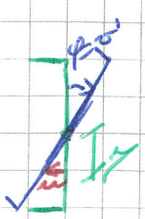
INFINITESIMI DI ORDINE SUP

TEORIA TECNICA NELLA TEORIA DELLE TRAVI PARTO DALL'IP. DI CONSERVAZIONE DELLE SEZIONI PIANE.



• LA SEZIONE RESTA PIANA E ORTOGONALE RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO

• INGRANDISCO



$$\boxed{u(y) = -\varphi y = -v'y}$$

SI SA COSA SUCCEDE IN DIR. ASSIALE CONOSCENDO COSA SUCCEDE IN DIREZIONE TRASVERSALE (luogo y, v')

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = -yv''}$$ → DEF. LEGATE ALLA CURVATURA

• ABBIAMO BISOGNO DI UN LEGAME ELASTICO TRA TENSIONE E DEFORMAZIONE

Ignoriamo la presenza delle armature

BARICENTRO GEOMETRICO

SI IGNORANO ALTRI BARICENTRI

• $\sigma = \sigma \varepsilon$

• $\sigma_c = 30'000 \frac{N}{mm^2} \equiv MPa$

$\sigma_D = 210000 \frac{N}{mm^2} \equiv MPa$

$\sigma_x = -\sigma y v''$ → LA TENSIONE DIPENDE OLTRE CHE DALLA CURVATURA ANCHE DAL MATERIALE

• RIGIDEZZA: QUANDO σ È CONSEGUENTE AD UNO SPOST. UNITARIO (l'acciaio è più rigido)

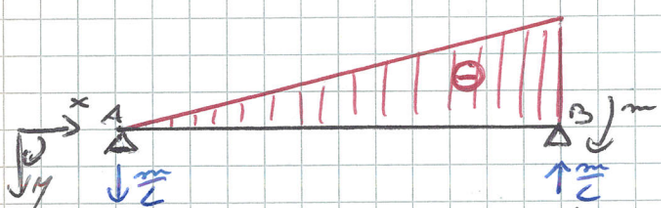
• GRANDE CURVATURA ⇒ ALTE TENSIONI

$M_z = \int_A y \sigma_x \, dA \Rightarrow M_z = -\sigma v'' \int_A y^2 \, dA = -\sigma v'' I_z$

↓ MOM. FLETTENTE

$M = -\sigma I v''$ → COLLEGA LA CINEMATICA ALLA STATICA

• σI = RIGIDEZZA FLESSIONALE DELLA SEZIONE



$M(x) = -m \frac{x}{L}$

$v'' = -\frac{M}{\sigma I} = +\frac{m}{\sigma I L} x$

$v' = \frac{m}{\sigma I L} \frac{x^2}{2} + C_1$

$v = \frac{m}{\sigma I L} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

⇒

• $v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$v(L) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{mL}{6\sigma I}$

$v(x) = \frac{m}{6\sigma I} \frac{x^3}{L} - \frac{mL}{6\sigma I} x$

• $\varphi = v'(x) = \frac{m}{2\sigma I} \frac{x^2}{2} - \frac{mL}{6\sigma I}$

$\varphi(x=0) = \varphi_A = -\frac{mL}{6\sigma I}$

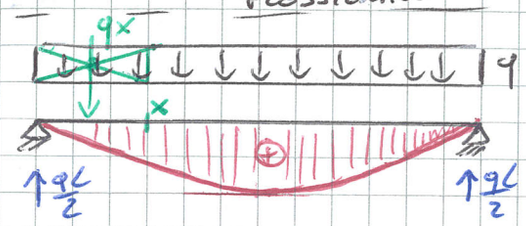
$\varphi(x=L) = \varphi_B = \frac{mL}{3\sigma I}$

$\sigma = [FL^{-2}]$

$I = [L^4]$

$\sigma I = [FL^2]$

- $\sigma = E\varepsilon$ → MATERIALE
- $M = -EJ\,v''$ ⇒ SEZIONE
- $m = \frac{3EJ}{L}\varphi$ → STRUTTURALE (IL 3 DIPENDE DAI VINCOLI)
  - L → MEMBRATURA
  - J → FLESSIONALE



$$M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_{MAX} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{8}$$

$$v'' = -\frac{M}{EJ} = -\frac{q}{2EJ}(Lx - x^2)$$

$$v' = -\frac{q}{2EJ}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

$$v = -\frac{q}{2EJ}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1x + C_2$$

$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow v(L) = 0 \Rightarrow -\frac{q}{2EJ}\frac{L^4}{12} + C_1L = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24EJ}$

$$v(x) = -\frac{q}{2EJ}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{qL^3}{12}x\right)$$

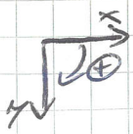
$$v'(x) = -\frac{q}{2EJ}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{12}\right)$$

$$v''(x) = -\frac{q}{2EJ}\left(Lx - \frac{2x^2}{3}\right)$$

$$\boxed{\varphi(x=0) = \varphi_A = \frac{qL^3}{24EJ}} \qquad \boxed{\varphi(x=L) = \varphi_B = -\frac{qL^3}{24EJ}}$$

$$v_{MAX} = f = v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{q}{2EJ}\left(\frac{L^4}{48} - \frac{L^4}{192} - \frac{L^4}{240}\right) \Rightarrow \boxed{v_{MAX} = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EJ}}$$

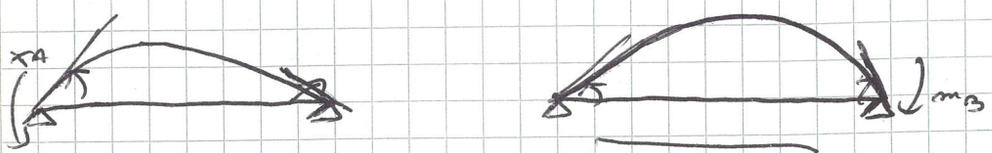
FRECCIA



⇓ SC. CONGR.

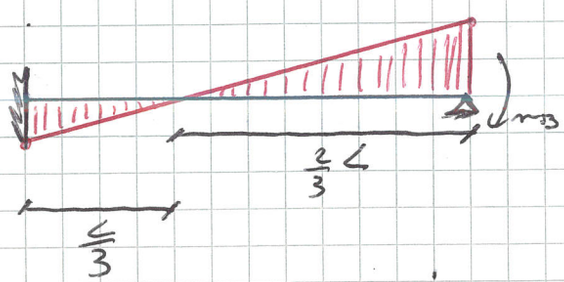
- EQUILIBRIO RISPETTATO $\forall X_A$
- ∃ PERÒ UNICA SOL. CONGRUENTE ⇒ $\varphi_A = 0$

- PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

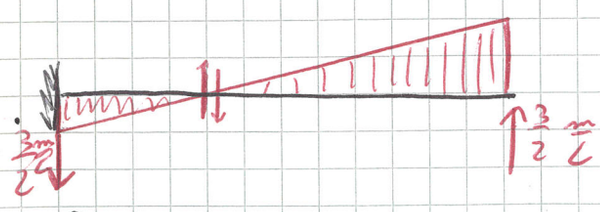


$$-\frac{X_A L}{3EI} - \frac{mL}{6EI} = 0 \Rightarrow \boxed{X_A = -\frac{m}{2}}$$

- LA SOL. NON DIPENDE DA "EI" (la rigidezza) ⇒ GRANDE VANTAGGIO
- POSSO CALCOLARMI LE SOLUZIONI SENZA CONOSCERE LE SOLLECITAZIONI AGENTI
- IL PESO DIPENDE DALLA STRUTTURA (peso proprio)



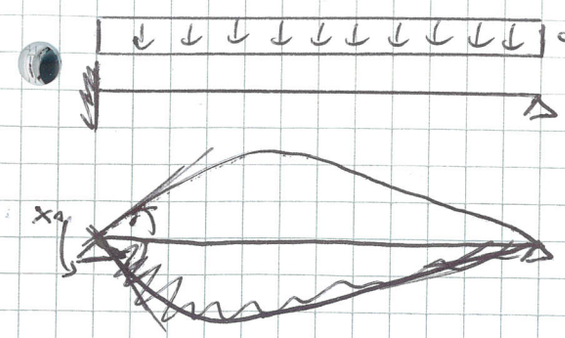
- TAGLIANDO LA TRAVE NEL PUNTO DI NULLO DEL MOMENTO CA. POSSO SCOMPORRE SEMPRE COME SOMMA DI 2 MENSOLE



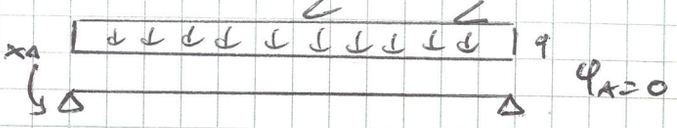
$$\varphi_B = \frac{m_B L}{3EI} - \frac{mL}{6EI} = \frac{3m-m}{6EI} = \frac{m_B L}{6EI}$$

$$m_B = \frac{6EI}{L}\varphi_B \qquad \text{se } \varphi_B = 1 \Rightarrow \frac{6EI}{L} = \text{RIGID. FLESS. DELLA TRAVE INC- APP.}$$

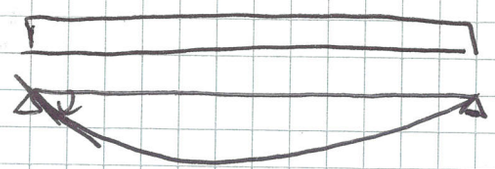
- INCASTRO PIÙ RIGIDO DELL'APPOGGIO: $\frac{3EI}{L} \rightarrow \frac{4EI}{L}$



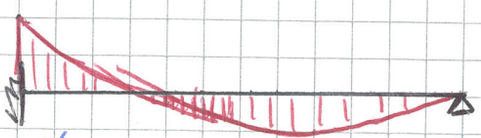
$\Rightarrow$



+



$$\varphi_A = -\frac{X_A L}{3EI} + \frac{qL^3}{24EI} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{X_A = \frac{qL^2}{8}}$$

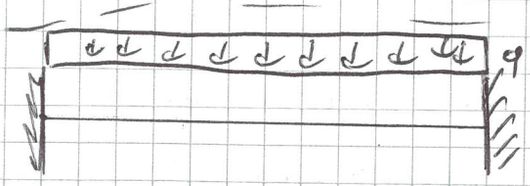


SOVR. DEGLI EFFETTI

$$T(x) = \frac{5}{8}qL - qx$$

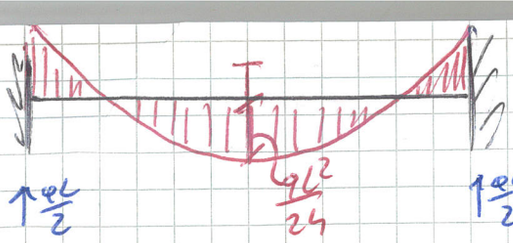
$$T(x_{MAX}) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x_{MAX} = \frac{5}{8}L}$$

$$M_{MAX} = -\frac{qL^2}{8} + \frac{5}{8}qL\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}L\right) - \frac{5}{8}qL \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}L = \frac{qL^2}{8}\left(-1 + \frac{25}{8} - \frac{25}{16}\right) = \frac{qL^2}{128}$$



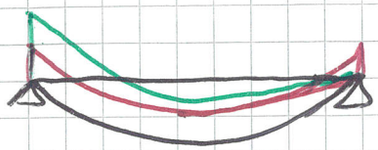
$$-\frac{XL}{3EI} \qquad -\frac{XL}{6EI} \qquad +\frac{qL^3}{24EI} = 0$$

$$\boxed{X = \frac{qL^2}{12}}$$



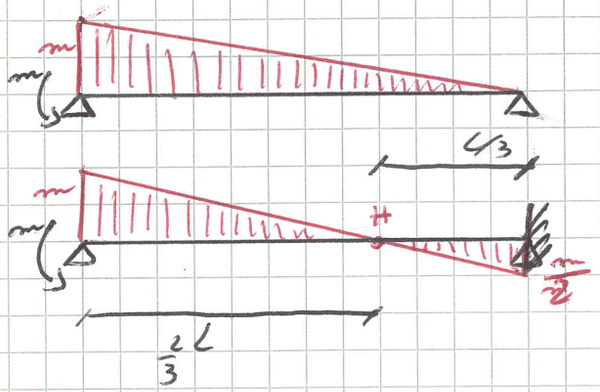
- È IL DIAGR. DELLA TRAVE APP-APP TRASLATO VERSO L'ALTO DI $\frac{ql^2}{8}$

$\frac{d^2M}{dx^2} = q$



- SE MOLTO L'INCASTRO
- INC-~~APP~~ INC.
- INC-INC.

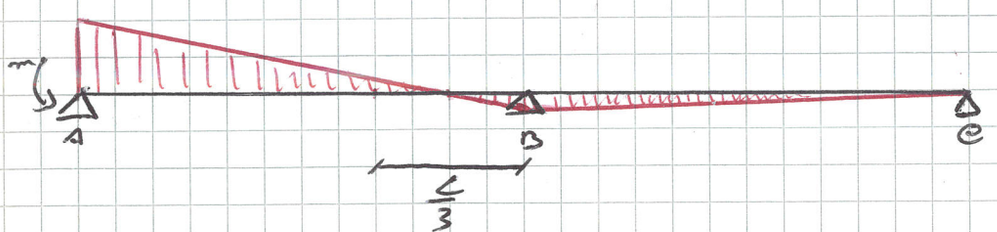
- METODI SEMPLICI PER CONTROLLARE RISULTATI COMPLESSI



DIAGR. LINEARE | $\cdot q=0 \Rightarrow \delta = cost \Rightarrow M$ cost.

- H = NULLO $\Rightarrow$ FLESSO NELLA DEF.

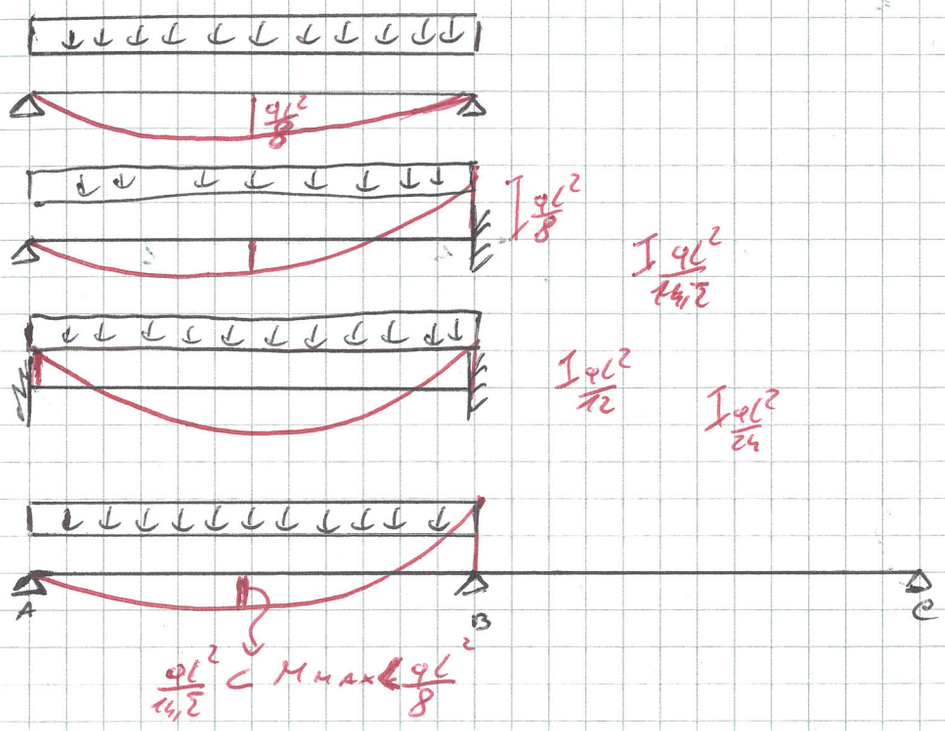
$M = -EI\,v'' \Rightarrow v''=0 \Rightarrow v$ ha un flesso



- PER RISOLVERE LA STRUTTURA(isost) BISOGNA FARE I CALCOLI.
- DIAGRAMMA DEL MOMENTO A "MANIERA", OSSIA NON IL VERO DIAGRAMMA DEL MOMENTO (poiché non abbiamo i calcoli), MA CONCETTUALMENTE GIUSTO (senza calcoli), COSÌ VERIFICHIAMO I RISULTATI CHE AVREMO
- IN A È PARI A "m" (APP. DOVE $M=0$ E IN CUI HO MESSO "m")
- IN B È UN INTERMEDIO TRA APP E INCASTRO:
  - SE $l_{BC} \to 0 \Rightarrow$ INCASTRO ("C" VICINO A "B")
  - SE $l_{BC} \to \infty \Rightarrow$ APPOGGIO (TRAVE MOLTO DEFORMABILE)

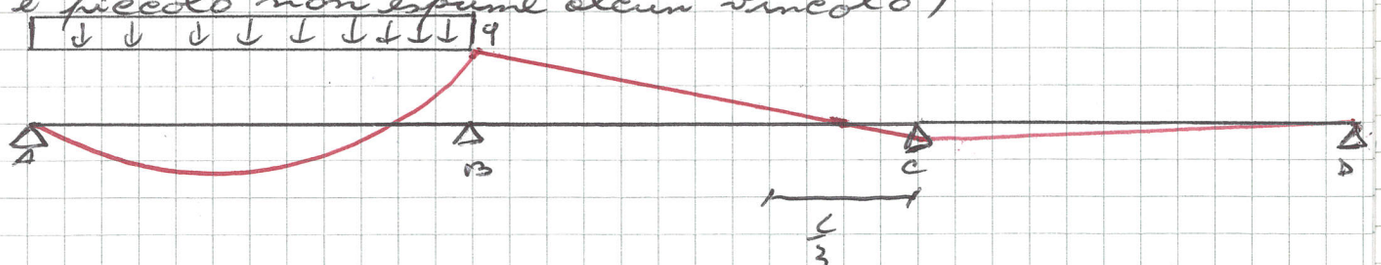
- IN AB C'È UN PUNTO DI NULLO ~~SD~~ È INTORNO ALL'INTORNO DI $\frac{L}{3}$ DALL'APPOGGIO IN B (VEDERE). SAREBBE PIÙ VICINO A $\frac{L}{3}$ SE L'APPOGGIO "C" È VICINO ALL'APP IN "B", ALTRIMENTI È PIÙ VERSO "B". $\rightarrow M_B < \frac{M}{2}$, SE M_B ESCE DA QUESTO INTERVALLO SIGNIFICA CHE ABBIAMO SBAGLIATO QUALCOSA (IMPORTANTE!!!), LO STESSO SE VIENE DI SEGNO OPPOSTO

- POI PROSEGUE FINO A "C" BANALMENTE

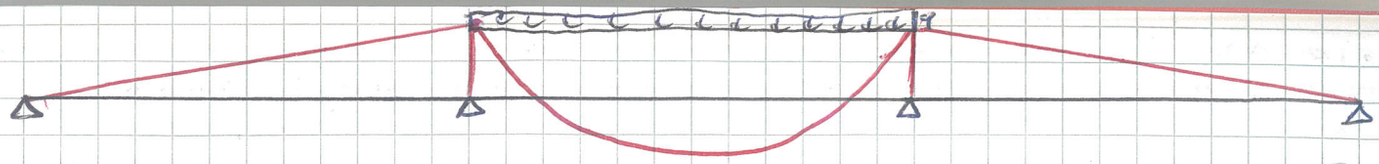


$\frac{ql^2}{14,2} < M_{MAX} < \frac{ql^2}{8}$

- PER SAPERE M_B SI FA LO STESSO RAGIONAMENTO DI PRIMA $\Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{ql^2}{8} < M_B < 0$ (si deve tener conto anche di ciò che c'è BC, se è piccolo non esprime alcun vincolo)



- QUI È LA STESSA COSA DI PRIMA IN AB
- TUTTO CIÒ A DX DI B, SI OPPONE ALLE SUE ROTAZIONI
- $-\frac{ql^2}{8} < M_B < 0$
- TRA BC HO CHE IN B HO UNA VIA DI MEZZO TRA L'APP E L'INC. E IN B HO UNA COPPIA



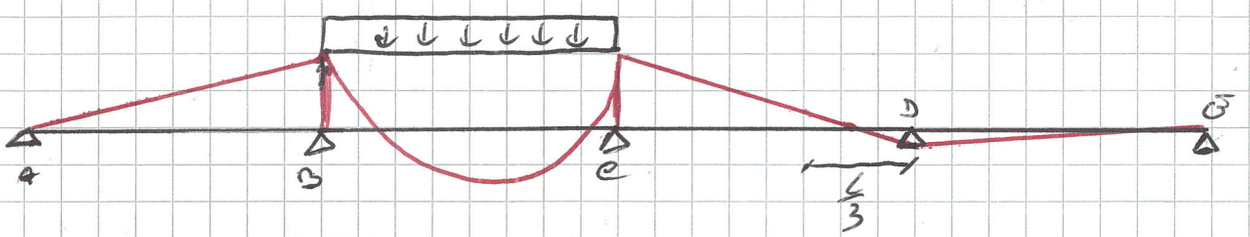
- BC ⇒ DIAGR. PARABOLICO E IN B E IN C HO UN VINCOLO INTERMEDIO (APP. OPPURE INC. DIPENDE DA l_{AB}, l_{CD} e EI). SO CHE M_B e M_C È COMPRESO TRA 0 e $-\frac{ql^2}{12}$

- MAT ⇒ E
- SEZ ⇒ EI
- TRAVE ⇒ $\frac{EI}{L}$

(schema tra trave APP-APP e INC-INC)

$$\boxed{-\frac{ql^2}{12} < M_B, M_C < 0}$$

⇒ È IMPOSSIBILE SAPERE QUALE DEI DUE È PIÙ GRANDE



- TRA CD IL PUNTO DI NULLO VA TRA 0 E $\frac{l}{3}$ DA "D"
- PIÙ CI SI ALLONTANA DALL'AZIONE, PIÙ GLI EFFETTI SI SMORZANO (infatti più si è lontani da "q", più il diagramma è piccolo) (PRINCIPIO DI D.S.V. GENERALIZZATO)
- SE METTO UN CARICO ACCIDENTALE TRA B e C E DEVO VEDERE IL CONTRIBUTO DI $M^{(-)}$ TRA DE, NON LO METTO, POICHÉ COSÌ ALLEGERISCO IL $M^{(-)}$ IN DE (visto che lì mi porta $M^{(+)}$ il "q") QUINDI IL CARICO ACCIDENTALE NON VA SEMPRE MESSO, BISOGNA VEDERE COSA CERCO
- NELLE ISOSTATICHE PIÙ CARICO E PIÙ HO MOMENTO

- NOI SIAMO UN CARICO ACCIDENTALE

- NELLE IPERSTATICHE IL CARICO PUÒ PROVOCARE EFFETTI POSITIVI O NEGATIVI