

# APPUNTI DI COSTRUZIONE DI MACCHINE



## LEGAME COSTITUTIVO (regime elastico)

Abbiamo visto l'importanza della determinazione dei momenti flettenti e torcenti e come, note queste sollecitazioni semplici, siamo in grado di ricavare lo stato di sforzo nei punti interni che ne consegue, ossia le componenti normali e le componenti estensionali che mi descrivono lo stato tensionale del mio componente.

Il legame tra le  $\sigma$  e le  $\epsilon$  dipende dal materiale che vado a considerare.

Quando, allora, parliamo di legame costitutivo intendiamo la legge che lega le tensioni alle deformazioni e viceversa.

In questo corso ci occuperemo prevalentemente di materiali metallici, per i quali possiamo fare l'ipotesi di isotropia.

I materiali omogenei e isotropi hanno legame costitutivo, in regime elastico, descritto dalla seguente equazione:

$$\epsilon_{ij} = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij}$$

(notazione indiciale, compatta le singole componenti hanno pedici che variano da 1 a 3)

L'equazione su scritta deve tener conto delle seguenti due regole:

- I termini con indici ripetuti vanno sommati (traccia):
- Delta di Kronecker:

$$\sigma_{kk} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

L'equazione ci dice che la generica componente di deformazione  $\epsilon(ij)$  si ottiene considerando le generiche componenti di sforzo  $\sigma(ij)$ , il modulo di Young  $E$  e il modulo di Poisson  $\nu$ .

Essendo il materiale isotropo non sono tenuto a specificare se il modulo di Young  $E$  è riferito ad una particolare direzione in quanto questo è uguale in tutte le direzioni (non utilizzo pedici) ed è ottenuto attraverso la prova di trazione uniassiale.

Per gli acciai  $E$  vale, tipicamente, 200 GPa, ossia 200'000 MPa (esso varia a seconda del materiale ma su per giù può essere ricondotto a tale valore per i materiali da noi considerati).

Il modulo di Poisson  $\nu$  è un'altra costante elastica. Se, come nella prova di trazione, tiro il materiale, questo si contrae nelle altre direzioni: c'è una deformazione positiva che tende ad allungare il cilindro prova e contemporaneamente la sezione si contrae nelle altre direzioni.

Quindi, se applico una forza su un cilindro in modo da avere una sollecitazione semplice di carico assiale a trazione lungo la direzione "x", lo sforzo derivante dalla forza, lontano dalle facce estreme sulle quali è applicata la forza, lo posso scrivere come il rapporto tra la forza applicata  $F$  e l'area  $A$ :

$$\sigma(x) = \frac{F}{A};$$

tale sforzo mi provocherà sicuramente una deformazione  $\epsilon(x)$  legata allo sforzo stesso attraverso la legge di Hooke

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Se, quindi, in direzione "x" abbiamo un allungamento, nelle direzioni "y" e "z" riscontriamo una contrazione della sezione del cilindro prova che mi permette di definire un'altra costante elastica caratteristica del materiale, il modulo di Poisson, come il rapporto tra la deformazione trasversale rispetto alla deformazione longitudinale, a meno del segno:

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{trasm}}}{\epsilon_{\text{long}}} \quad \text{con } \epsilon(\text{trasm}) = \epsilon(y) \text{ o } \epsilon(z) \\ \epsilon(\text{long}) = \epsilon(x).$$

Tale valore, per materiali di uso comune e in regime elastico è quasi sempre pari a 0.3; ovviamente è adimensionale in quanto, misurando le deformazioni in mm/mm (tralasciando che già le deformazioni stesse siano grandezze adimensionali), essendo il coefficiente  $\nu$  ricavato da un rapporto, è scontato l'annullamento di qualsivoglia unità di misura.

Il valore di 0.3 per  $\nu$  vale, come detto, in regime lineare elastico, mentre, quando si entra in campo plastico, potendo, con buona approssimazione, definire la legge di conservazione dei volumi, possiamo ritenere  $\nu=0.5$  dato che, per tale legge, ad un allungamento su un asse corrisponde una contrazione sugli altri due.

*La differenza tra regime lineare elastico e regime plastico sta nella risposta del materiale nel momento di rimozione del carico agente su di esso: le deformazioni ottenute in regime lineare elastico sono deformazioni non permanenti (rimosso il carico applicato il materiale recupera le sue caratteristiche chimico-fisiche di partenza); le deformazioni in regime plastico sono deformazioni permanenti.*

*Allora, nel momento in cui, dopo aver caricato un materiale con una forza  $F$ , entro in regime plastico, rimuovendo il carico stesso, recupererò solo un'aliquota di deformazione, quella relativa al regime elastico, mentre saranno permanenti le deformazioni relative al regime plastico.*

Avendo analizzato la notazione indiciale scritta sopra, riportiamo due esempi, relativi, il primo, alla deformazione causata dallo sforzo  $\sigma_{11}$  e, il secondo, alla deformazione causata dallo sforzo  $\sigma_{12}$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\varepsilon_{12} = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{12}$$

La scrittura compatta indiciale a cui abbiamo fatto riferimento fin ora è del tutto analoga a tale matrice di deformabilità (Compliance):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Facendo la moltiplicazione Riga\*Colonna riottengo la formula su vista, specificata ai casi che voglio analizzare.

Tale matrice di deformabilità è fondamentale la determinazione delle costanti elastiche: sperimentalmente siamo in grado di misurare le deformazioni che si creano in un materiale sottoposto a un carico. Facendo delle ipotesi sul legame costitutivo, posso calcolare le costanti elastiche e gli sforzi. (es. sottoponendo il nostro provino a sollecitazioni semplici in caso uniassiale, sarà presente solo lo sforzo  $\sigma_{11}$  mentre saranno nulle tutte le altre  $\sigma$ ; posso, allora, misurare la  $\varepsilon(11)$  e quindi essere in grado di trovare E).

Per quanto riguarda le componenti di Taglio, esiste l'analogia con la legge di Hooke:

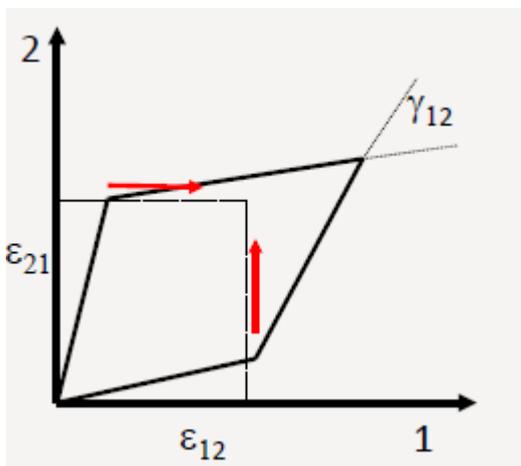
$$\text{legge di Hooke: } \sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \tau = G \cdot \gamma$$

con G= modulo elastico a taglio  
 $\gamma$ =deformazioni angolari  
 indotte dalla sollecitazione di taglio

La differenza tra  $\varepsilon_{(ij)}$  e  $\gamma_{(ij)}$  è che

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

Graficamente, applicando una componente di taglio al punto materiale rappresentato dal cubetto, la deformata sarà come indicato nella rappresentazione.



La deformazione angolare  $\gamma$  è il doppio della deformazione  $\varepsilon$ .

La matrice di deformabilità, sostituendo a  $\varepsilon_{(ij)}$  la deformazione angolare  $\gamma_{(ij)}$ , diverrà:

$$\begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} = \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{array}$$

Attuando la moltiplicazione Riga\*Colonna con, ad esempio,  $\gamma_{12}$  otteniamo che:

$$\gamma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12}$$

che, raffrontato con  $\mathbf{T} = \mathbf{G} * \mathbf{\Upsilon}$ , ci fa ricavare la costante elastica G in funzione al modulo di Young E e al coefficiente di Poisson U:

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

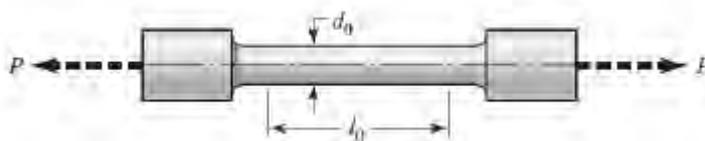
(Proprietà valide per materiali isotropi, laddove ci sono anisotropie si devono introdurre  $G_{(12)}, G_{(13)}, G_{(23)}$ ).

Da queste considerazioni possiamo concludere che per un materiale isotropo le costanti elastiche da determinare sono sempre due: o G ed E, o G e U, o U ed E. La terza costante la si trova attraverso la relazione scritta sopra in quanto le tre costanti sono legate tra di esse.

Una tabella che riassume il discorso è la seguente, con tanto di distinzione tra tipi di stati tensionali (non vengono riportate le componenti di taglio perché ci troviamo in un sistema di riferimento principale con  $\sigma(1)$ ,  $\sigma(2)$  e  $\sigma(3)$  direzioni principali):

Tipo di stato tensionale	Deformazioni principali	Tensioni principali
Uniassiale	$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ $\epsilon_2 = -\nu\epsilon_1$ $\epsilon_3 = -\nu\epsilon_1$	$\sigma_1 = E\epsilon_1$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$
Biassiale	$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$ $\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E}$ $\epsilon_3 = -\frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$	$\sigma_1 = \frac{E(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2)}{1 - \nu^2}$ $\sigma_2 = \frac{E(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)}{1 - \nu^2}$ $\sigma_3 = 0$
Triassiale	$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}$ $\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}$ $\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$	$\sigma_1 = \frac{E\epsilon_1(1 - \nu) + \nu E(\epsilon_2 + \epsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}$ $\sigma_2 = \frac{E\epsilon_2(1 - \nu) + \nu E(\epsilon_1 + \epsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}$ $\sigma_3 = \frac{E\epsilon_3(1 - \nu) + \nu E(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{1 - \nu - 2\nu^2}$

## PROVA TRAZIONE UNIASSIALE



Introduciamo ora le proprietà principali di una prova di trazione uniassiale.

La prova uniassiale è la prova principe per la caratterizzazione di un materiale metallico. Il risultato di tale prova può essere riportato in un grafico  $(\sigma, \epsilon)$  con  $\sigma$  e  $\epsilon$ , più delle volte, ingegneristiche, ossia calcolate non tenendo conto della strizione riguardante la sezione del provino:

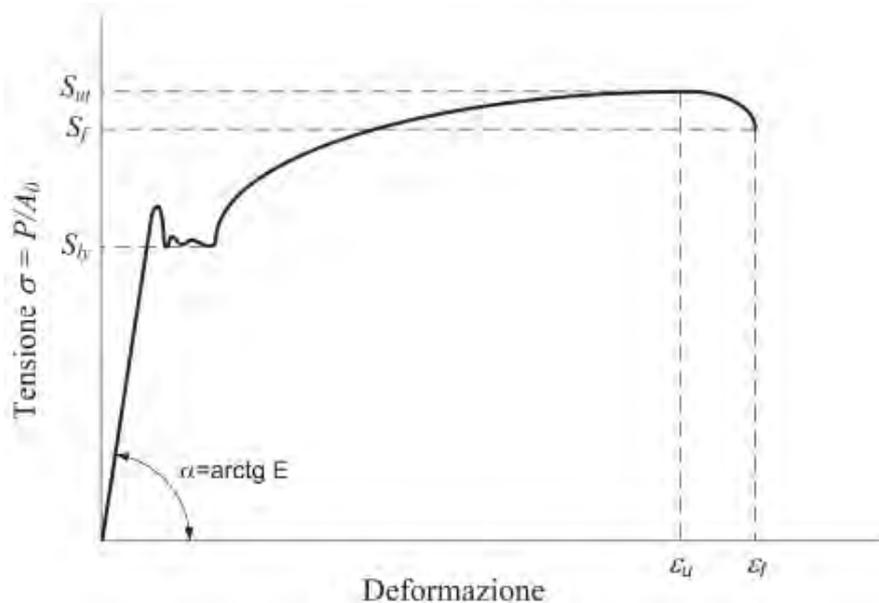
$$\sigma_i = \frac{P}{A_0}$$

Lo stesso concetto vale anche per la deformazione ingegneristica,  $\epsilon_i$ , che tiene conto della lunghezza iniziale e rispetto a questa calcola la variazione di lunghezza dovuta al carico P, ossia  $\Delta l$ :

$$\epsilon_i = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

E' scontato capire che i concetti di tensione e deformazione ingegneristica sono ben diversi dai valori reali di  $\sigma$  e  $\epsilon$ .

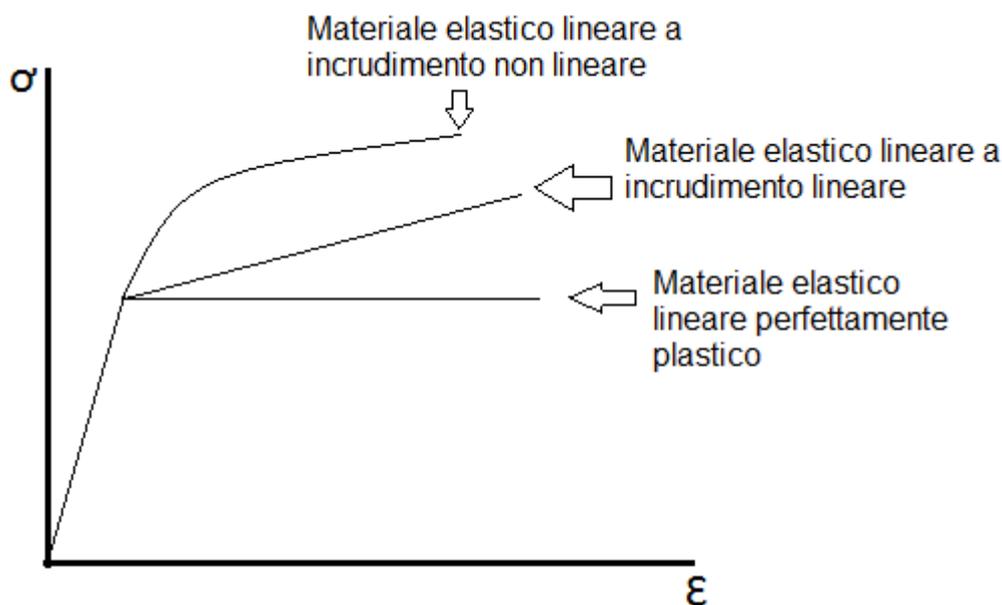
L' andamento di tensione e deformazione ingegneristica per un acciaio si può graficare in questo modo:



- Il primo tratto è quello relativo al regime lineare elastico, molto ripido in quanto servono sforzi molto alti per ottenere piccole deformazioni, con pendenza legata al modulo di Young attraverso la relazione di  $\alpha = \arctg(E)$ .
- Superato un certo livello di tensione, entriamo in regime plastico. Per entrare in tale regime dobbiamo superare lo Snervamento, ossia il livello di deformazione che mi

induce, in una prova di trazione uniassiale, una deformazione permanente dello 0.2% .

Siccome abbiamo considerato sforzi e deformazioni ingegneristici, si può notare come nell'ultima parte di grafico la curva raggiunge un massimo di tensione in  $S(\sigma)$  e poi cala a  $S(f)$ . Sembra, quindi, che, superato un punto di massimo, sia necessaria una forza più bassa di quella applicata per provocare deformazioni. In realtà, tale considerazione è legata al fatto di aver utilizzato  $\sigma$  e  $\epsilon$  ingegneristici invece di utilizzare i rispettivi valori reali: a rigor di logica la curva dovrebbe essere sempre crescente. Gli andamenti successivi allo Snervamento vengono comunemente semplificati attraverso l'uso di modelli (semplificazioni della realtà):



A seconda delle necessità si operano delle semplificazioni dettate da modelli esistenti.

Soffermiamoci ora sulla differenza tra tensione-deformazione ingegneristica e tensione-deformazione vera.

Differentemente dalle definizioni semplificate sopra portate, per quanto riguarda tensione e deformazione vera, dobbiamo tener conto della variazione di dimensione che avviene a causa del carico applicato, per esempio, sulla sezione.

Allora, possiamo definire  $\epsilon_v$ , deformazione vera come:

$$\epsilon_v = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln(1 + \epsilon_i) \quad \text{con} \quad \frac{l}{l_0} = (1 + \epsilon_i) \quad \text{in quanto} \quad \epsilon_i = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Le deformazioni vere sono anche chiamate logaritmiche per evidenti ragioni di scrittura analitica.

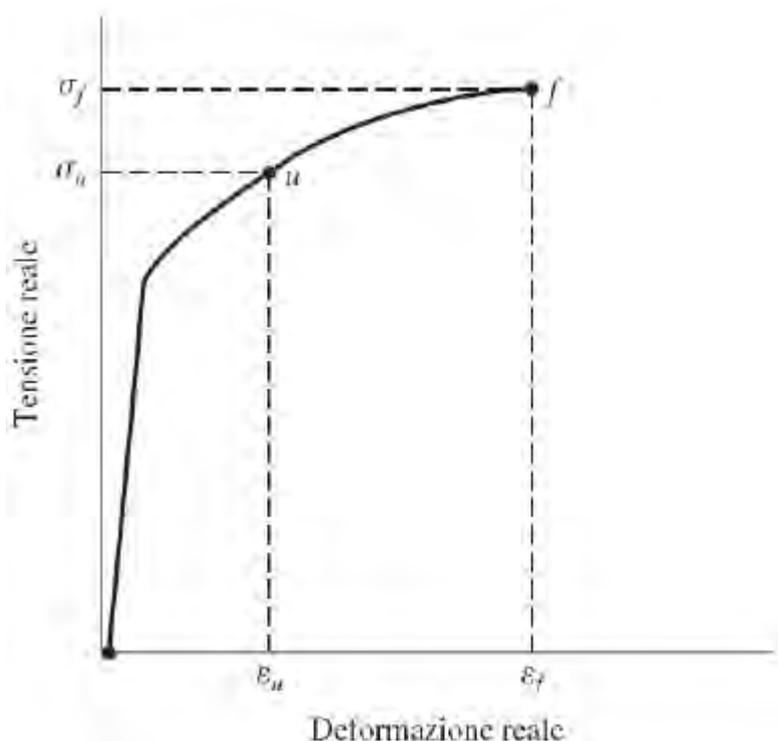
Per trovare, invece, il legame tra tensione vera e tensione ingegneristica, devo ricordare che in campo plastico esiste la conservazione dei volumi, ossia:

$$A_0 \cdot l_0 = A \cdot l \quad \rightarrow \quad A = A_0 \cdot \frac{l_0}{l} = \frac{A_0}{1 + \epsilon_i} \quad \text{con "A" sezione e "l" lunghezza del cilindro prova.}$$

A questo punto posso definire la  $\sigma_v$ , tensione vera, come il rapporto tra il carico P e l'area reale (che si riduce) della sezione A :

$$\sigma_v = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} (1 + \varepsilon_i) = \sigma_i (1 + \varepsilon_i)$$

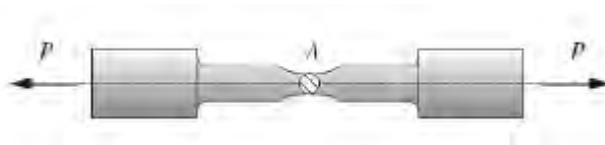
La differenza tra le grandezze ingegneristiche e quelle vere si nota soprattutto a grandi distanze dal regime plastico.



Diagrammando i valori di tensione e deformazione vere, noto, quindi, come la curva non abbia quel calo finale che, invece, presentava nel caso di tensione e deformazione ingegneristica.

Tale considerazione mi fa concludere che, nella realtà, la  $\sigma$  a rottura ( $\sigma_f$ ,  $\sigma$  failure) è sempre il più grande dei valori.

## FENOMENO DEL COLLASSO PLASTICO



I materiali metallici che esibiscono una grande duttilità, raggiunto il punto di massimo ( $S(ut)$ ) del diagramma sforzo-deformazione ingegneristico, danno vita, localmente, al fenomeno della strizione (necking).

In tale condizione stiamo perdendo l'uniformità della tensione e della deformazione lungo il tratto utile a causa del forte restringimento che si crea nella sezione del provino.

Le tensioni e le deformazioni non saranno, quindi, costanti lungo il tratto utile: siamo di fronte al Collasso Plastico .