Quaderno di esercitazioni di Algebra e Geometria

Sottospazi vettoriali

Definizione di sottospazio vettoriale

Sia W un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V.
Allora W è un sottospazio vettoriale di V se:

1) $W \neq \phi$
2) $\underline{u}, \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{u}+\underline{v} \in W$ stabilità rispetto alla somma interna.
3) $k \in \mathbb{K}$, $\underline{u} \in V \Rightarrow k\underline{u} \in W$ stabilità rispetto al prodotto esterno.

Verificare se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali.

Esercizio 1

$$W = \{(0,a,b) \in \mathbb{K}^3 \,/\, a,b \in \mathbb{K}\}$$

Questa dicitura è detta "rappresentazione parametrica" del sottospazio vettoriale in quanto a e b sono dei parametri che variano ~~al~~ ~~variare~~ nel campo $\mathbb{K}$.

- $(0,0,0) \in W \Rightarrow W \neq \phi$ in quanto $\exists$ il vettore nullo
- $(0,a,b), (0,a',b') \in W$

$(0,a,b)+(0,a',b') = (0, a+a', b+b') \in W$ in quanto è della stessa specie del vettoriale iniziale.

- $k \in \mathbb{K}$ $(0,a,b) \in W$

$k(0,a,b) = (k \cdot 0, ka, kb) = (0, ka, kb) \in W$ verifica quindi la proprietà del prodotto esterno.

Pertanto W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^3$.

Esercizio 2

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y+z=0\}$$

Questa dicitura è detta "rappresentazione cartesiana" in quanto la soluzione ~~vettore~~ deve verificare l'equazione $x-y+z=0$.

- $(0,0,0) \in W$ in quanto sostituendo il vettore nullo nell'equazione $x-y+z=0$ vediamo che essa verifica l'equazione e cioè $0=0$.

Quindi $W \neq \phi$.

- $(x,y,z) \in W$, $(x',y',z') \in W$

$x-y+z=0$
$x'-y'+z'=0$

$(x,y,z)+(x',y',z') = 0$

$(x+x', y+y', z+z') = 0$

Vediamo se soddisfa l'equazione:

$$x+x'-y-y'+z+z'=0 \Rightarrow \underbrace{(x-y+z)}_{0} + \underbrace{(x'-y'+z')}_{0} = 0$$

Quindi essendo $0=0$, allora vuol dire che è verificata la proprietà di somma interna

$k \in \mathbb{R} \quad (x,y,z) \in W$

$x - y + z = 0$

$k(x,y,z) = (kx, ky, kz)$

Vediamo se verifica l'equazione e cioè:

$kx - ky + kz = 0 \Rightarrow k(\underbrace{x-y+z}_{0}) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Verificata la proprietà del prodotto esterno.

Quindi W è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Esercizio 3

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x+2y-z+t-1=0\}$$

W non è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{K}^4$ in quanto non esiste il vettore nullo.
Il vettore nullo non esiste perché anche se scegliessimo un vettore a componenti tutte nulle esso non verificherebbe l'equazione e cioè:

$(0,0,0,0) \in W \Rightarrow (0+0-0+0-1) \neq 0$

c.v.d.

Esercizio 4

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$$

Cerchiamo di verificare le 3 proprietà:

- $(0,0) \in W \Rightarrow 0 = 0$ quindi è verificata l'equazione, pertanto $W \neq \emptyset$
- Consideriamo due vettori e facciamo la somma:

$(1,1) \in W \quad (2,4) \in W$

$(1,1) + (2,4) = (3,5)$

ciò comporta che $y \neq x^2 \Rightarrow 5 \neq 9$ e quindi non è verificata l'equazione e pertanto non verificandosi l'equazione non è verificata l'operazione di somma interna.

Quindi W non è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{R}^2$ in quanto non è verificata l'operazione di somma.

Esercizio 5

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$ "Rappresentazione parametrica"

Notiamo che la posizione a_{21} è data dalla somma delle posizioni a_{11} e a_{12}, mentre la posizione a_{22} è identica alla posizione a_{12}.
Quindi ∃ la matrice nulla e cioè:

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$

• Consideriamo le seguenti due matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b \end{pmatrix} \in W \qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'+b' & b' \end{pmatrix} \in W$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'+b' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ (a+a')+(b+b') & b+b' \end{pmatrix}$$

è verificata la proprietà di somma interna in quanto anche nella matrice somma nella posizione a_{21} ho la somma delle posizioni a_{11} e a_{12} e nella posizione a_{22} ho l'identico della posizione a_{12}.

• Vediamo se è verificata la proprietà del prodotto esterno:

$k \in \mathbb{R}$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b \end{pmatrix} \in W$

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ ka+kb & kb \end{pmatrix} \in W$$

Anche in questo caso il ragionamento è analogo a quello di somma.

Quindi W è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$

Esercizio 6

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x \geq 0\}$$

W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ anche se ∃ il vettore nullo ed è verificata la proprietà di somma interna.
W non è sott. vett. perché non è verificata la proprietà di prodotto esterno, in quanto stando in $\mathbb{R}$ possiamo scegliere qualunque k, cioè anche negativo, ma se k è negativo allora la prima componente del vettore sarà negativa anziché positivo come nel vettore iniziale.

Osservazioni

• Quando un sottoinsieme W contiene vettori che hanno potenza maggiore di 1, allora sicuramente W non è un sottospazio vettoriale. Es. $W = \{(x, x^2, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

• Quando un sottoinsieme W contiene vettori con componenti non nulle allora sicuramente W non sarà un sottospazio vettoriale Es. $W = \{(1, x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione di indipendenza lineare

Sia S un sistema di vettori $S=[\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n}]$. Diremo che S è linearmente indipendente o libero se l'unico modo per avere:

$$a_1 \underline{v_1} + a_2 \underline{v_2} + \dots + a_n \underline{v_n} = \underline{0}$$

è con scalari tutti nulli.

Definizione di dipendenza lineare

Un sistema S è legato o linearmente dipendente se non è libero, cioè se $\exists$ una combinazione lineare

$$a_1 \underline{v_1} + a_2 \underline{v_2} + \dots + a_n \underline{v_n} = \underline{0}$$

con scalari non tutti nulli

Esercizio 1

Verifichiamo se il seguente sistema S è linearmente dipendente o indipendente:

$$S = \{(1,1,1),(0,0,2),(1,-1,0)\}$$

Costruiamo una combinazione lineare ponendola uguale al vettore nullo:

$$a(1,1,1)+b(0,0,2)+c(1,-1,0)=(0,0,0)$$

$$(a,a,a)+(0,0,2b)+(c,-c,0)=(0,0,0)$$

$$(a+c,\ a-c,\ a+2b)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ a-c=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=0 \\ a=c \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Siccome tutti gli scalari della combinazione lineare sono nulli allora S è un sistema linearm. indipendente.

Esercizio 2

Verificare se S è linearmente dipendente o indipendente:

$$S = \{(1,0,-1),(0,1,2),(2,1,0)\}$$

Costruiamo una combinazione lineare ponendola uguale al vettore nullo:

$$a(1,0,-1)+b(0,1,2)+c(2,1,0)=(0,0,0)$$

$$(a,0,-a)+(0,b,2b)+(2c,c,0)=(0,0,0)$$

$$(a+2c,\ b+c,\ -a+2b)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b+c=0 \\ -a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2b+2c=0} \\ b+c=0 \\ a=2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ a=2b \end{cases}$$

2 equazioni in 3 incognite quindi questo sistema ammette infinite soluzioni e quindi la combinazione lineare posta uguale al vettore nullo ha scalari non tutti nulli e pertanto S è linearm. dipendente.

Una delle infinite soluzioni può essere:

$$b=1,\quad a=2,\quad c=-1$$

Esercizio 3

$S = \{(1,0,-1), (0,1,2), (2,1,0)\}$

Costruiamo una combinazione lineare:

$a(1,0,-1) + b(0,1,2) + c(2,1,0) = (0,0,0)$

$(a+2c,\ b+c,\ -a+2b) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b+c=0 \\ -a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{+2b}-\cancel{2b}=0 \\ c=-b \\ a=2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-b \\ a=2b \end{cases}$$

2 equazioni in 3 incognite quindi S ammette infinite soluzioni e pertanto è linearm. dipendente.

Esercizio 4

$S = \{(1,-1,0,1), (0,0,1,3), (0,1,0,0), (1,0,1,0)\}$

$a(1,-1,0,1) + b(0,0,1,3) + c(0,1,0,0) + d(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$

$(a+d,\ -a+c,\ b+d,\ a+3b) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} a+d=0 \\ -a+c=0 \\ b+d=0 \\ a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-a \\ c=a \\ b-a=0 \\ -2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

S è linearm. indip. perché tutti gli scalari della combinazione lineare sono nulli.

Esercizio 5

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Costruiamo una combinazione lineare ponendola uguale alla matrice nulla:

$$a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5c \\ -2c & 6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a-b+5c \\ b-2c & 2a+6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-b+5c=0 \\ b-2c=0 \\ 2a+6c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-3c}+\cancel{2c}+\cancel{5c}=0 \\ b=2c \\ a=-3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2c \\ a=-3c \end{cases}$$

2 equazioni in 3 incognite quindi S ammette infinite soluzioni e pertanto è un sistema linear. dipendente

Una delle infinite soluzioni di S è:

$c=1 \qquad a=-3 \qquad b=2$

perchè sostituendo nella combinazione lineare otteniamo:

$$-3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è verificata l'identità

Base e dimensione di sottospazi

Definizione di base
Una base è un sistema di generatori linearmente indipendente

Definizione di dimensione
Uno spazio vettoriale $V(K)$ ha dimensione n, e scriveremo $\dim V = n$, se n è il numero di vettori che compongono una sua qualunque base.

Definizione
Sia $V_n(K)$ uno spazio vettoriale e sia $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una sua base. Per ogni vettore $\underline{v} \in V$ si dicono componenti di $\underline{v}$ rispetto alla base B i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tali che:

$$\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_n \underline{v}_n$$

Esercizio 1
Stabilire se l'insieme $B = \{(1,0,1),(0,-1,0),(1,2,-3)\}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3$.
Determinare inoltre le componenti del vettore $(2,4,-2)$ rispetto alla base B.

- Per vedere se B è una base di $\mathbb{R}^3$ bisogna vedere se i 3 vettori sono linearm. indipendenti; costruiamo quindi una combinazione lineare ponendola uguale al vettore nullo:

$$a(1,0,1) + b(0,-1,0) + c(1,2,-3) = (0,0,0)$$

$$(a,0,a) + (0,-b,0) + (c,2c,-3c) = (0,0,0)$$

$$(a+c, -b+2c, a-3c) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -b+2c=0 \\ a-3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-c \\ +b=2c \\ -4c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

La combinazione lineare è data da tutti scalari nulli e quindi i 3 vettori sono linear. indipend. e quindi B è una base

- Per determinare le componenti del vettore $(2,4,-2)$ rispetto alla base B, consideriamo una combinazione lineare dei 3 vettori della base ponendola uguale al vettore $(2,4,-2)$:

$$a(1,0,1) + b(0,-1,0) + c(1,2,-3) = (2,4,-2)$$

$$(a+c, -b+2c, a-3c) = (2,4,-2)$$

$$\begin{cases} a+c=2 \\ -b+2c=4 \\ a-3c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2-c \\ -b+2c=4 \\ 2-c-3c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2-c \\ \\ -4c=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

Quindi l'isomorfismo coordinato è:

$$c_B(2,4,-2) = (1,-2,1)$$

Esercizio 2

Stabilire se l'insieme $B=\{(1,-1,0,0),(-2,0,1,0),(0,3,-1,0),(0,-1,0,2)\}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^4$.

Per vedere se B è una base basta verificare che i 4 vettori sono linear. indipendenti, consideriamo pertanto una combinazione lineare:

$$a(1,-1,0,0)+b(-2,0,1,0)+c(0,3,-1,0)+d(0,-1,0,2)=(0,0,0,0)$$

$$(a-2b,-a+3c-d,b-c,2d)=(0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} a-2b=0 \\ -a+3c-d=0 \\ b-c=0 \\ 2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ -2b+3b=0 \\ c=b \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

Essendo questa una combinazione lineare con scalari tutti nulli, allora i 4 vettori sono linear. indipendenti e quindi B forma una base di $\mathbb{R}^4$.

- Determinare le componenti del vettore $(-1,-6,3,-2)$ rispetto alla base B.

Per fare questo consideriamo una combinazione lineare della base e poniamola uguale al vettore:

$$a(1,-1,0,0)+b(-2,0,1,0)+c(0,3,-1,0)+d(0,-1,0,2)=(\ ,\ ,\ ,\ )$$

$$(a-2b,-a+3c-d,b-c,2d)=(-1,-6,3,-2)$$

$$\begin{cases} a-2b=-1 \\ -a+3c-d=-6 \\ b-c=3 \\ 2d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2b-1 \\ -2b+1+3b-9+1=-6 \\ c=b-3 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \\ d=-1 \end{cases}$$

Quindi le componenti del vettore $(-1,-6,3,-2)$ sono date dall'unica soluzione del sistema:

$C_B(-1,-6,3,-2)=(1,1,-2,-1) \Rightarrow$ Isomorfismo coordinato.

Per risolvere i prossimi esercizi consideriamo il teorema:

Sia $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V. Se esiste un vettore $v_i\in S$ che è combinazione lineare dei rimanenti vettori di S allora il sistema $S/\{v_i\}$ è un sistema di generatori di V.

Esercizio 3

Dato il sottospazio vettoriale $W=\mathcal{L}((1,0,-1,1),(2,1,0,0),(-1,-2,-3,3))$. Determinare la dimensione e una base di W.

W è generato da questi 3 vettori.

Se questi 3 vettori sono linearm. indipend. allora essi formano una base di W di dim 3, se invece i 3 vettori sono linearm. dipendente allora dobbiamo procedere all'eliminazione di qualche vettore che risulta essere combinazione lineare dei rimanenti, fino a quando non abbiamo un sistema di vettori linearm. indipend.

Costruiamo pertanto una combinazione lineare ponendola uguale al vettore nullo:

$a(1,0,-1,1)+b(2,1,0,0)+c(-1,-2,-3,3)=(0,0,0,0)$.

$(a,0,-a,a)+(2b,b,0,0)+(-c,-2c,-3c,3c)=(0,0,0,0)$

$(a+2b-c,\ b-2c,\ -a-3c,\ a+3c)=(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} a+2b-c=0 \\ b-2c=0 \\ \cancel{-a-3c=0} \\ a+3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-3c}+\cancel{4c}-\cancel{c}=0 \\ b=2c \\ a=-3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2c \\ a=-3c \end{cases}$$

2 equazioni in 3 incognite quindi il sistema ammette infinite soluzioni e pertanto il sistema è linearm. dipend.

Una delle infinite soluzioni del sistema è:

$c=1 \qquad b=2 \qquad a=-3$

Vediamo ora un vettore che è combinazione lineare degli altri due:

$-3(1,0,-1,1)+2(2,1,0,0)+(-1,-2,-3,3)=(0,0,0,0)$

$(-1,-2,-3,3)=3(1,0,-1,1)-2(2,1,0,0)$

Essendo quindi il vettore $(-1,-2,-3,3)$ combinazione lineare degli altri due, allora può essere eliminato. Vediamo quindi se i rimanenti due formano un sistema linearm. indipendente:

$a(1,0,-1,1)+b(2,1,0,0)=(0,0,0,0)$

$(a,0,-a,a)+(2b,b,0,0)=(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} a+\cancel{2b}=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Quindi la combinazione lineare è data da scalari tutti nulli e pertanto il sistema dei due vettori è linearm. indipend.

In conclusione:

$W=\mathcal{L}((1,0,-1,1),(2,1,0,0))$

questo sottospazio W è generato da due soli vettori linear. indip. quindi formano una base di W di dim 2.

$\{(1,0,-1,1),(2,1,0,0)\} \Rightarrow$ Base di W di dim 2.

Esercizio 4

Dato il sottospazio vettoriale $W=\mathcal{L}((1,0,2),(-1,1,0),(5,-2,6))$.

Determinare la dimensione e una base di W.

Vediamo se i 3 vettori sono linearm. indipendenti, costruiamo pertanto una combinazione lineare:

$a(1,0,2)+b(-1,1,0)+c(5,-2,6)=(0,0,0)$.

$(a-b+5c,\ b-2c,\ 2a+6c)=(0,0,0)$